Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 9

Abgabe am 19. Dezember 2016 bis 10:15 Uhr

33. Es sei G eine endliche Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind H und K zwei Untergruppen von G von teilerfremder Ordnung (also mit $\mathrm{ggT}(|H|, |K|) = 1$), dann gilt $H \cap K = \{1\}$.

(b) Es gelte $|G| = 2n$ und sei H eine Untergruppe von G der Ordnung n. Sind $a, b \in G$ mit $a, b \notin H$, dann gilt $ab \in H$.

34. Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls jedes Element ungleich 1 in G die Ordnung 2 hat, dann ist G abelsch.

(b) Angenommen $H \subsetneq G$ ist eine echte Untergruppe, die jede andere echte Untergruppe von G enthält. Dann ist G zyklisch von Primpotenzordnung.

35. (a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen mit höchstens fünf Elementen.

(b) Zeigen Sie, dass S_3 bis auf Isomorphie die einzige nicht-abelsche Gruppe mit höchstens sieben Elementen ist.
(*Vorschlag.* Zeigen Sie zunächst, dass eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6 ein Element der Ordnung 3 und ein Element der Ordnung 2 enthalten muss. Wie sehen dann die übrigen Elemente der Gruppe aus?)

36. Es sei $\sigma \in S_{14}$ eine Permutation der Ordnung 22.

(a) Wie sieht die Zerlegung von σ in disjunkte Zykel aus? Ist σ eine gerade oder eine ungerade Permutation?

(b) Zeigen Sie, dass es genau ein $i \in \{1, \dots, 14\}$ mit $\sigma(i) = i$ gibt.

(c) Zeigen Sie: Ist $\sigma' \in S_{14}$ eine weitere Permutation der Ordnung 22, dann gibt es $\tau \in S_{14}$ mit $\sigma\tau = \tau\sigma'$.