Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen

Michael Meyer und Susanne Prediger
Vorversion des in PM-Heft 30 erschienenen Artikels. Praxis der Mathematik in der Schule 51(30), S. 1-7.

Argumentieren, Begründen und Beweisen werden immer wieder als zentrale Tätigkeiten und Lernziele des Mathematikunterrichts genannt, an die Lernende sukzessive herangeführt werden sollen. Um diesem Ziel noch besser gerecht werden zu können, stellt der Artikel Theorieelemente und praktische Ansätze vor, Begründungssituationen diagnostizieren und fördern zu können.

Die didaktischen Herausforderungen beim Begründen und Beweisen sind seit vielen Jahren bekannt:

- Einerseits gilt *Mathematik als beweisende Disziplin*, andererseits spielen Beweise im Unterricht eine nur *untergeordnete Rolle* und werden oft als *schwierig* angesehen.
- Einerseits soll *„Warum?“ die wichtigste Frage* des Mathematikunterrichts sein, die auch eine typische Haltung repräsentiert, andererseits verspüren Lernende oft von sich aus *kein Beweisbedürfnis* (s. u. a. Winter 1983, Schwarzkopf 2000).
- Einerseits gelten *Argumentieren und Begründen* als wichtige, auch außermathematische Tätigkeiten, die in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht erlernt werden sollen, andererseits ist *formal-deduktives Schließen* sehr spezifisch für Mathematik.

Daher wird gefordert, dem Argumentieren, Begründen und Beweisen im Unterricht mehr Raum zu geben und dabei nicht nur formales Beweisen, sondern auch andere Begründungsformen zu kultivieren.

In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz wurde diese Forderung ebenfalls aufgegriffen und „mathematisch argumentieren“ zu einer der vier anzustrebenden prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen erhoben. Dass es für ihre Umsetzung allerdings noch keineswegs selbstverständliche Standards und Strategien gibt, zeigt in problematischer Form die in *Kasten 1 links* abgebildete Beispielaufgabe, die zur Konkretisierung der Anforderungen den Bildungsstandards der Hauptschule (KMK 2004) angehängt wurde. „Begründen“ beschränkt sich hier auf das Ausrechnen naheliegender alternativer Preise.

Fähre

An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle:

Einzelkarte	1 Person	50,00 €
Blockkarte	8 Personen	380,00 €
Blockkarte	20 Personen	900, 00 €

…

c) Für eine Gruppe aus 24 Personen rechnet Frank einen Preis von 1140,00 € aus.

Maike meint, dass die Gruppe günstiger fahren kann. Hat sie Recht? Begründe.

Summe der ersten Zahlen

a) Berechne jeweils:

1 + 2 + 3 + 4 =

1 + 2 + 3 + 4 + .. + 10 =

1 + 2 + 3 + 4 + …. + 100 =

b) Klara meint: „Aha, ich muss immer die erste und letzte Zahl addieren und dann multiplizieren mit der Hälfte."

Hat Klara Recht mit ihrer Entdeckung? Begründe.

Kasten 1: *Sehen so geeignete Begründungsanlässe aus?*

Auch der Vergleich der beiden Beispielaufgaben in *Kasten 1* wirft die Frage auf, was mit Beweisen und Begründen genau gemeint ist. Wann ist ein Beweis überhaupt als Beweis akzeptabel?

Was ist Begründen und Beweisen?

Diskrepanz zwischen Außenbild und Praxis

Mathematik ist eine beweisende Disziplin. Oft wird betont, dass in der Mathematik im Unterschied zu anderen wissenschaftlichen Disziplinen (zumindest theoretisch) alle Aussagen aus Axiomen deduktiv hergeleitet werden können. Beweise in wissenschaftlichen Publikationen sind meist *formal* (d. h. sie beruhen auf einem auf Regeln basierten Manipulieren von Zeichen) und in dem Sinne *streng*, dass die einzelnen Schritte notwendig aus den vorangegangenen folgen. So ist das Außenbild der Mathematik oft bestimmt durch die Behauptung, jedes generierte Wissen könne – zumindest theoretisch – lückenlos axiomatisch-deduktiv abgesichert werden.

Die wissenschaftliche Praxis dagegen sieht völlig anders aus: Wenn beispielsweise zwei Wissenschaftlerinnen gemeinsam an der Tafel an einer Problemstellung arbeiten, so tauschen sie nicht formale Beweise aus, sondern Bilder und inhaltlich-anschauliche Argumente. Erst im Prozess der Vorbereitung einer Publikation werden diese zu formalen Beweisen ausgebaut (Hersh 1997, Heintz 2000).

Wann ist ein Beweis ein Beweis? Vielfalt der akzeptierten Begründungsarten

Um so hitziger wurde viele Jahre lang die Frage diskutiert, ab wann eine Begründung als „ordentlicher mathematischer Beweis" gilt.

Um diese Frage zu diskutieren, betrachten wir in *Kasten 2* die Vielfalt an Begründungsformen anhand des Beispiels der Gauß'schen Summenformel aus *Kasten 1* rechts. Begründet wird in der 1. und 2. Variante in der numerischen Darstellung, in der 3. und 4. in einer grafischen Darstellung und in der 5. bis 7. in einer symbolischen Darstellung.

Satz: Es gilt $1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$

1. „Begründung“ mit speziellem Beispiel

$1+2+3=\frac{3}{2}(3+1)=\frac{3}{2}\cdot 4=6$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=$

$\frac{10}{2}(10+1)=5\cdot 11=55$

2. Begründung mit generischem Beispiel

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=5\cdot 11$

$=11$

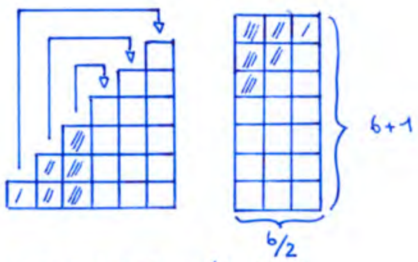
$=11$

$=11$

$=11$

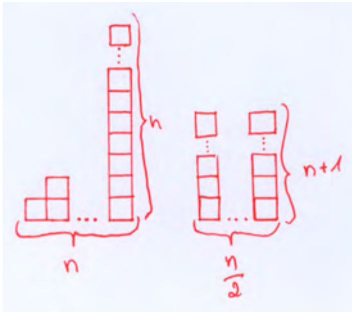
$=11$

3. Begründung mit generischem Bild



$1+2+3+4+5+6 = \frac{6}{2}\cdot(6+1)$

4. Begründung mit allgemeinem Bild



5. Begründung mit Algebraisierung

$$\begin{aligned} 2\cdot(1+\ldots+n) &= 1 + 2 + \ldots + n-1 + n \\ &+ n + n-1 + \ldots + 2 + 1 \\ &\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n\cdot(n+1)} \end{aligned}$$

Da also $2\cdot(1+\ldots+n)=n\cdot(n+1)$, ist $1+\ldots+n=\frac{n}{2}\cdot(n+1)$.

6. Begründung mit vollständige Induktion

Induktionsanfang:
$n=2$: Es gilt $1+2=3=\frac{2}{2}(2+1)=\frac{2}{2}\cdot 3$

Induktionsannahme:
Sei m eine beliebige Zahl, für die gilt:
$1+2+\ldots+m=\frac{m}{2}(m+1)$

Induktionsschluß:
Zu zeigen, wenn dies für m gilt, gilt es auch für m+1:

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+m+(m+1) &= \frac{m}{2}\cdot(m+1)+(m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2}+\frac{2m+2}{2} \\ &= \frac{m^2+m+2m+2}{2} \\ &= \frac{(m+1)}{2}\cdot(m+1+1) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

7. Mengentheoretische Begründung

…. durch Rückführung auf Peano-Axiome …

***Kasten 2**: Viele Begründungsarten für die Gauß'sche Summenformel*

Natürlich sind die Darstellungen nicht alle gleichberechtigt, z. B. würde niemand in der Mathematik den ersten Begründungsversuch als Beweis akzeptieren. Zwar würden 100 überprüfte Beispiele in den meisten außermathematischen Zusammenhängen schon als ausreichendes Argument gelten, doch müssen Lernende erst begreifen, dass in der Mathematik dagegen Allgemeinheit anders hergestellt werden muss.

In der zweiten Begründung dagegen wird zwar auch an einem Zahlenbeispiel argumentiert, doch werden nur Argumente benutzt, die auf alle anderen Zahlen übertragbar wären, die Zahlen werden also als allgemeine Zahlen benutzt und die Verallgemeinerung explizit benannt. Eine solche Begründung am generischen Beispiel ist für die unteren Jahrgänge der Schule angemessen, insbesondere, solange keine Variablen zur Verfügung stehen.

Das Gleiche gilt für die 3. Begründung am generischen Bild (vgl. Müller/Wittmann 1988, Blum/Kirsch 1989), die wie jede inhaltlich-anschauliche Begründung mit folgerichtigen Argumenten arbeitet, ihre Stützungen jedoch nicht aus dem formalen System, sondern aus Bildern oder realitätsbezogenen Erwägungen oder Ähnlichem zieht.

Beweise an Bildern können Verallgemeinerbarkeit noch konsequenter garantieren, wenn sie die Allgemeinheit der Werte durch Pünktchen andeuten, wie in der 4. Begründung. Der höhere Grad an Allgemeinheit und somit auch an Abstraktheit kann jedoch zur Folge haben, dass das Bild weniger zugänglich ist und somit an Überzeugungskraft verliert.

Oft wird die 5. Begründung als der 3. oder 2. deutlich überlegen angesehen, weil hier mit Variablen statt allgemeinen Zahlen begründet wird. Im speziellen Beispiel sehen wir die Begründungen eher als gleichberechtigt an, denn der strukturelle Kern ist gleich und die Pünktchen verweisen weiterhin auf eine zu schließende Argumentationslücke. In komplizierteren Beweisen dagegen können die allgemeinen Zahlen oft an Leistungsgrenzen geraten, die durch Variable besser abgedeckt werden können.

Eine erste Rückführung auf eine Axiomatik gelingt in der 6. Begründung, die mit dem starken Beweisprinzip der vollständigen Induktion arbeitet. Dass auch hier nicht die endgültige Form des exakten Beweises erreicht ist, soll durch die 7. Begründung nur angedeutet werden. Die Zurückführung auf die Peano-Axiome könnte fortgesetzt werden mit einer axiomatischen Fundierung der Mengenlehre (z. B. den Zermelo-Fraenkel-Axiomen), die wiederum nach dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz keine vollständige Fundierung außerhalb der jeweiligen Theorie finden kann.

Wann ist ein Beweis ein Beweis? Soziale Akzeptanz statt absolute Sicherheit

Das Beispiel zeigt, dass Exaktheit immer nur relativ zur Argumentationsbasis sein kann. Somit hängt die Frage, wann ein Beweis als Beweis akzeptiert wird, immer ab von der in einer Gemeinschaft festgelegten gemeinsamen Argumentationsbasis. Zudem enthält jeder mathematische Beweis Lücken oder Appelle an die Intuition, die nicht durch formale Regeln allein überprüft werden können (Ernest 1998, S. 186).

Wie wird dann aber entschieden, ob ein Beweis tatsächlich als gültig betrachtet wird? Viele forschende Mathematikerinnen und Mathematiker wie etwa Manin verwiesen hier auf die soziale Dimension der Akzeptanz:

„Ein Beweis wird erst dann zum Beweis, wenn er in einem sozialen Akt als solcher akzeptiert wird." (Manin 1977, zit. nach Heintz 2000, S. 178).

Die Wissenssoziologin Heintz kommentiert dies nach eigenen Feldforschungen in einem mathematischen Forschungsinstitut so:

„Ausgeprägter als Wissenschaftler anderer Disziplinen betonen Mathematiker die soziale Dimension ihrer Wissenschaft. Kaum eine andere Disziplin bindet Wahrheit in diesem Ausmaß an die wissenschaftliche Gemeinschaft und die von ihr ausgebildeten Normen und Institutionen zurück." (Heintz 2000, S. 188)

Dass nicht absolut festgelegt werden kann, wann eine Begründung akzeptabel ist, impliziert jedoch nicht Beliebigkeit. Grenzen der Beliebigkeit werden sowohl in *Kasten 2* in der ersten Begründung (aufgrund der fehlenden Verallgemeinerbarkeit) als auch mit der Aufgabe in *Kasten 1 links* überschritten (wo der Begründungsauftrag nicht authentisch ist).

Die Begriffe Begründen, Beweisen, Argumentieren

Um das vorgestellte, breitere mathematikphilosophische Verständnis mathematischen Begründens zu erfassen, wurden in der Mathematikdidaktik unterschiedliche begriffliche Ausdifferenzierungen vorgeschlagen. Da der Begriff *Beweisen* häufig eng mit axiomatisch-deduktiver Erkenntnissicherung, mit formalem Charakter und mit Strenge der Schlussfolgerung verbunden ist, wird er oft ergänzt durch den breiteren Begriff *Begründen*, wenn auch andere Begründungsformen wie das inhaltlich-anschauliche Begründen mitgedacht sind. Die Abgrenzung zwischen Beweisen und Begründen verstehen wir dabei als graduell und nicht dichotom.

Die soziale und kommunikative Dimension des Begründens wird mit dem Begriff des *Argumentierens* noch deutlicher akzentuiert.

> „Der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als Argumentation bezeichnet." (Schwarzkopf 2000, S. 240)

Mit diesen begrifflichen Unterscheidungen kann die dritte der eingangs formulierten Herausforderungen nun konstruktiv umformuliert werden: Gerade weil das formal-deduktive Beweisen sehr spezifisch für mathematische Publikationen ist und keine direkten Entsprechungen außerhalb der Mathematik hat, sollte sich Mathematikunterricht auf das Begründen im breiteren Sinne und das Argumentierens in sozialen Kontexten konzentrieren, die beide für mathematische Erkenntnisprozesse zwar nicht spezifisch, aber dennoch *typisch* sind, wie wissenschaftssoziologische Untersuchungen zeigen (Heintz 2000). Auf dieser Basis kann sich ein Leistungskurs der Oberstufe, der auch der Studienvorbereitung dienen soll, dann auch dem formal-deduktiven Beweisen als Ausblick widmen.

Begründen hat nicht nur Überzeugungsfunktion

Alltägliche und mathematische Begründungen unterscheiden sich auch hinsichtlich der Funktionen des Begründens, die in *Kasten 3* zusammengefasst sind.

Fünf Funktionen des Begründens:

1. Überzeugen (Verifizieren, dass eine Behauptung wahr ist)
2. Erklären (Verstehbar machen, warum eine Behauptung gilt)
3. Kommunizieren (mathematisches Wissen und Wege anderen vermitteln)
4. Entdecken (Erzeugen neuer Ergebnisse)
5. Zusammenhänge herstellen (Systematisieren und Vernetzen verschiedener Begriffe und Sätze der Theorie)

Kasten 3: *Funktionen des Begründens, nach de Villiers (1990, S. 18)*

Die vierte Funktion (Entdecken) mag zunächst verwundern. Doch ist in der Tat das Auffinden von Ansatzpunkten einer Begründung oft ein Akt der Entdeckung. Zudem können einzelne Punkte innerhalb der Begründung dazu anregen, neue Entdeckungen zu vollziehen.

Während die ersten drei Funktionen (Überzeugen, Erklären, Kommunizieren) auch für alltägliches Argumentieren und Begründen eine Rolle spielen, ist für die Mathematik auch die fünfte Funktion sehr zentral, nämlich das Herstellen logischer Zusammenhänge zwischen verschiedenen Sätzen und Begriffen, selbst bei schon einsichtigen Aussagen. Diese ist Lernenden jedoch kaum präsent, wie Hea-

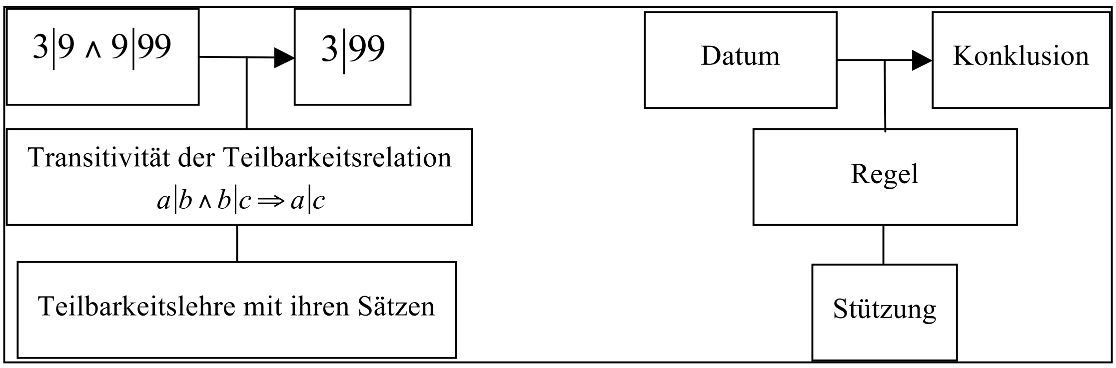
ly und Hoyles (1998) in einer Befragung von über 2000 englischen Jugendlichen zeigten: Auf die Frage, wofür ein mathematischer Beweis gut ist, nannten 50 % die Überzeugungsfunktion, 35 % die Erklärungsfunktion, alle anderen Funktionen waren nur mit unter 2 % der Nennungen vertreten (obwohl Doppelnennungen erlaubt waren), viele Lernende wussten auch gar keine Antwort.
Habermas (1999) unterscheidet das *Argumentieren miteinander* vom *Argumentieren gegeneinander*. Im Alltag argumentieren wir in der Regel gegeneinander, um eine Streitigkeit zu beheben und einen rationalen Konsens zu finden. Dabei steht die Überzeugungsfunktion des Begründens meist im Vordergrund. Im Mathematikunterricht dagegen wird eher miteinander argumentiert, ausgelöst oft durch Impulse der Lehrkraft, nicht durch Dissens. Hier werden die Funktionen des Erklärens und Kommunizierens deutlicher in den Vordergrund gerückt.

Strukturen von Begründungen

Um (nicht nur mathematische) Begründungen in ihrer Struktur besser zu verstehen und hinsichtlich ihrer Korrektheit zu beurteilen, hilft ein elementares Schema, das Toulmin (1996) entwickelt hat. Es wird hier exemplarisch erklärt anhand einer Begründung für die Behauptung, dass 3 ein Teiler von 99 ist.

Den Ausgangspunkt bildet ein Faktum, aus dem die Behauptung folgen kann. Beispielsweise lässt sich die Behauptung, dass 3 ein Teiler von 99 ist, dadurch begründen, dass 3 ein Teiler von 9 und 9 ein Teiler von 99 ist (*Kasten 4, linkes Bild, oberer Teil*). Toulmin (1996) nennt die zu begründende Behauptung eine „Konklusion", den Ausgangspunkt einer solchen Begründung ein „Datum" für das Gegebene, Unbezweifelte (Allgemeine Struktur einer Begründung in *Kasten 4 rechts*).

Das Schließen der Konklusion aus einem Datum wird durch allgemeine Regeln ermöglicht, wie im Beispiel durch die Transitivität der Teilbarkeitsrelation. Diese wird ihrerseits gestützt durch den Theorieaufbau der Teilbarkeitslehre mit ihren Definitionen und hergeleiteten Sätzen.



***Kasten 4**: Struktur von Begründungen – am Beispiel und allgemein (nach Toulmin 1996)*

In den folgenden Abschnitten werden das Schema und die zuvor bereitgestellten Theorieelemente genutzt, um verschiedene, herausfordernde Beispielsituationen didaktisch adäquat zu analysieren und Handlungsoptionen vorzuschlagen.

Herausforderungen und Ansätze beim Lehren und Lernen von Begründen

Mit den folgenden Herausforderungen wollen wir typische Probleme beim Begründen, Beweisen und Argumentieren aufzeigen. Die Herausforderung wird dabei zunächst beschrieben und dann analysiert. Letztlich werden Vorschläge für Maßnahmen gegeben, mittels derer man diesen Herausforderungen begegnen kann.

1. Herausforderung: Begründungen überprüfen, verstehen und kommunizieren

Um eine Aussage zu begründen, sucht man ein Argument, dessen Konklusion die Aussage ist. Zum Begründen suchen Lernende also ein Datum und eine Regel, aus denen die zu begründende Aussage als Konklusion folgen kann. Die dazu notwendigen kognitiven Anforderungen sind nicht trivial und durchaus mit denen des Problemlösens zu vergleichen. Holland (2007, S. 152 ff.) spricht in diesem Kontext auch von einer „Beweisfindung". Eine Möglichkeit, das Finden einer Begründung zu trainieren, besteht darin, die Regeln explizit anzusprechen. Die erste Herausforderung nimmt sich u. a. dieses Themas an.
Was tut man als Lehrkraft, wenn zum Beispiel eine Schülerin (wir nennen sie Klara) so begründet?

Klara: „3 teilt 99, denn 3 teilt die hintere 9."

Klaras Begründung kann mit Toulmins Schema analysiert werden. Sie zieht zur Begründung der Behauptung 3|99 ein Datum heran, was durchaus stimmt. Die erste Kontrollfrage aus *Kasten 5* ist also zu bejahen. Als nächster Analyseschritt wäre die Regel zu rekonstruieren, die Klaras Verknüpfung von Datum und Konklusion legitimiert:

„Wenn 3 die Einerziffer einer Zahl teilt, dann teilt sie auch die Zahl."

Diese nicht richtige, allgemeine wenn-dann-Aussage würde Klara den Schluss vom Datum auf Konklusion erlauben, doch hat Klara sie (in diesem Beispiel) weder explizit formuliert, noch eine Stützung gegeben.

Solche Rekonstruktionen der Regel weisen Wege, wie eine Lehrkraft oder im Begründen trainierte Mitschülerinnen und Mitschüler in dieser Situation reagieren können: Nicht mit „Falsch, so geht das nicht", sondern zum Beispiel mit der Frage

„Wieso ist die Tatsache, dass 3 die hintere 9 teilt, ein Grund dafür, dass 3 die 99 teilt? Welche Idee hattest du dabei?"

Zur Widerlegung des Zusammenhanges von Datum, Regel und Konklusion ist nur ein Gegenbeispiel erforderlich, das sollten alle Kinder lernen (wie auch in vielen Lehrplänen explizit verlangt):

„Okay, deine Regel heißt also: Wenn 3 die Einerziffer einer Zahl teilt, dann teilt sie auch die ganze Zahl. Das müsste dann ja für alle Zahlen gelten. Aber was ist dann mit der 23?"

Ist die Regel durch Lehrende oder Lernende erst einmal expliziert, kann auch über mögliche Stützungen geredet werden: Wie können wir sicher sein, dass die Regel gilt? Oder was spricht dagegen? Als mögliche Stützung könnte Klara dann etwa auf die Endstellenregel für 2 und 5 verweisen, dann wäre die falsche Verallgemeinerung zum Gegenstand der Diskussion erhoben.
Natürlich soll Toulmins Schema und die daraus abgeleiteten Prüffragen in *Kasten 5* in dieser Formulierung kein expliziter Lernstoff für die Lernenden werden. Für die Lehrkraft jedoch ist beides hilfreich, um eine Diskussion über die **Angemessenheit** einer Begründung gezielter auf den Punkt hin moderieren zu können.

Prüffragen für die Angemessenheit einer Begründung

- Stimmt das Datum überhaupt, das zur Begründung herangezogen wird? Oder ist es nur eine Hypothese, die ihrerseits zu prüfen wäre?
- Ist die (explizit oder implizit) genutzte Regel, mit der Datum und Konklusion verbunden werden, korrekt?
- Passen Datum, Regel und Konklusion zueinander? Lässt sich dieser Zusammenhang widerlegen oder lässt er Ausnahmen zu?
- Mit welcher Argumentationsbasis wird die Regel gestützt? Ist sie im jeweiligen Kontext angemessen?

Kasten 5

Die Ausführungen zu Beginn des Artikels haben bereits deutlich gemacht, dass die Prüffragen bzgl. der Angemessenheit immer auch in Abhängigkeit von der sozialen Gemeinschaft und dem Kontext zu beantworten sind. Dies gilt insbesondere für die Plausibilität der Stützung und die Frage, welche Argumentationsbasis im jeweiligen Kontext akzeptiert wird. Was am Beispiel der Gauß-Formel bereits deutlich wurde, zieht sich durch alle Bereiche des Unterrichts. Wie soll man etwa auf folgende Begründung reagieren?

Paul: „3 teilt 99, denn wenn ich Dreiersprünge auf dem Zahlenstrahl mache, komme ich bei 99 an."

Die Argumentationsbasis von Pauls inhaltlich-anschaulicher Begründung eines einfachen Fakts umfasst die Auffassung des Dividierens als Umkehroperation des Multiplizierens und eine zeitlich-sukzessive Grundvorstellung vom Multiplizieren, die auf dem Zahlenstrahl dargestellt wird. Ein Lehrer wird sie im Kontext eines Rechenunterrichts, der auch inhaltliches Denken stärken will, sehr begrüßen, im Kontext der Teilbarkeitslehre, die auch Verallgemeinerungen anstrebt, jedoch für eher schwierig halten, sollen doch allgemeine Teilbarkeitsregeln gefunden werden.

Ebenso wie die Begründung, die Zusammenhänge zu allgemeinen Aussagen der Teilbarkeitslehre stiftet, bezieht Paul wichtige Darstellungen (Zahlenstrahl) und Vorstellungen (Umkehrung der Multiplikation) mit ein. Sie kann daher als Ausgangspunkt mit hohem Weiterentwicklungspotenzial betrachtet werden.

Regeln zu explizieren ist kein einfaches Unterfangen – nicht nur für Lernende. Auch wir tauschen uns im Alltag zumeist nur über das Datum bzw. die Konklusion aus. Auch können Regeln nur erahnt und noch nicht richtig durchdacht sein, sodass die Formulierung der Regel im Vergleich zu ihrer Anwendung ungleich schwieriger ist.

Fazit 1: Zum Beurteilen und Weiterentwickeln von Begründungen spielt die Explizierung der genutzten Regeln und Argumentationsbasen eine zentrale Rolle. Je breiter das Spektrum der zunächst akzeptierten Darstellungsformen und Stützungen für Begründungen ist, desto mehr Lernende werden mit dem Beweisen beginnen können.

2. Herausforderung: Vorschnelle Evidenzen von Beispielen entkräften

Ist die Konklusion selbst von allgemeiner Natur, so kommt es im Lernprozess oft zu vorschnellen Evidenzen, wie bei diesen Begründungen:

Mia: „Wann immer bei einer Zahl die Einerziffer durch vier teilbar ist, ist es die Zahl auch. Ich habe das an 24, 28 und 64 gesehen."

Theo: „In jedem Dreieck ist die Höhe gerade halb so hoch wie die Seite, ich hab es in meinem Dreieck nachgemessen."

Um allgemeine Behauptungen zu generieren und einsichtig zu machen, ist die Arbeit an Beispielen unabdingbar (vgl. Lengnink/Leuders 2008). Beispiele helfen, den Gültigkeitsbereich eines mathematischen Satzes auszuloten und Vertrauen in einen mathematischen Satz zu gewinnen. Der mathematische Satz bildet dann die Konklusion des betreffenden Arguments und kann als eine allgemeine wenn-dann-Aussage beschrieben werden (zur Begründung von wenn-dann-Aussagen vgl. Jahnke in diesem Heft). Generische Beispiele können helfen, die Struktur einer Behauptung zu durchschauen und einen inhaltlich-anschaulichen Beweis zu finden (vgl. Krumsdorf in diesem Heft).

Allerdings tendieren viele Novizen des Begründens dazu, wie Mia und Theo dem Einzelbeispiel vorschnell Evidenz zuzubilligen (Almeida 2001). Wenn Theo hier die Konklusion „Die Höhe jedes Dreiecks ist gerade halb so hoch wie die Seite“ mit dem Verweis auf das Datum eines Beispiels begründet, dann steckt dahinter eine Schlussweise, die wir im Toulmin-Schema als „Meta-Regel“ des Begründens bezeichnen können.

„Was ich an einem Beispiel überprüft habe, gilt immer.“

Im Unterricht ist es wichtig, die Nicht-Zulässigkeit dieser Schlussregel (wiederholt) zu thematisieren. Dies ist umso wichtiger, weil ihre Umkehrung (Widerlegen am Gegenbeispiel) ja zu den wichtigen Schlussregeln gehört. Die Nicht-Zulässigkeit lässt sich an falschen, allgemeinen Aussagen leichter einsehen als an richtigen. Zu einer solchen Erfahrung kann zum Beispiel folgender Arbeitsauftrag in einer sechsten Klasse beitragen:

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

a Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der folgenden Paare von Zahlen: 13 und 8, 15 und 4, 16 und 5.

b Was fällt dir auf? Kannst du eine Vermutung anstellen?

c Gilt diese Vermutung wirklich immer? Untersuchen andere Beispiele von Zahlen.

Anschließende Reflexion: Was hat uns zu der vorschnellen Vermutung geführt, wie haben wir sie weiter entwickelt?

Kasten 4

Die Zahlen der Aufgabe sind so gewählt, dass man vermuten könnte, das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen sei stets ihr Produkt. Diese Vermutung anhand weiterer Beispiele weiter einschränken zu müssen, ist eine heilsame Erfahrung.

An solchen Aufgaben zeigt sich zudem die Bedeutsamkeit von Beispielen in Begründungsprozessen: Im Gegensatz zu Beispielen, die einen Satz bestätigen, haben Gegenbeispiele eine deutlich stärkere Aussagekraft.

Fazit 2: Beispiele und Gegenbeispiele sind ein wichtiges Hilfsmittel in Begründungsprozessen. Dem Schluss von einem Beispiel auf die allgemeine Behauptung liegt allerdings eine nicht-gültige Schluss-Regel zugrunde, über die es sich zu reflektieren lohnt.

3. Herausforderung: Nicht auf Begründungsbedürfnis der Lernenden warten, sondern Sinn stiften durch Transparenz über Funktionen des Begründens

Mit vorschnellen Evidenzen verbunden ist das oft beklagte fehlende Beweisbedürfnis vieler Lernender (Winter 1983): Wenn zum Beispiel eine Klasse 7 mit einer dynamischen Geometriesoftware bereits entdeckt hat, dass jedes Dreieck einen Umkreis hat, dann haben viele Lernende kein Bedürfnis mehr nach einer Begründung, weil sie durch das Experimentieren bereits überzeugt sind. Wieso sollte also jetzt noch eine andere Begründung nötig sein?

Als eine mögliche Reaktion kann die Lehrkraft in die Rolle des Advocatus Diaboli schlüpfen und die Lernenden in ihrer Gewissheit verunsichern:

„Das stimmt doch nur für eure Beispiele. Ich finde bestimmt noch ein Dreieck, bei dem es nicht klappt.“

Auch wenn in einigen Situationen das Erschüttern der Überzeugung auf diese Weise gelingen kann, so ist es dennoch nicht immer tragfähig. In Bezug auf die Dreiecke wäre es insofern nicht authentisch, als dass die Evidenz der experimentellen Überprüfung zu stark ist für künstliche Zweifel. Erfolgversprechender ist in solchen Augenblicken, die Funktion des Begründens (*Kasten 3*) für die Lernenden transparent zu verschieben:

„Okay, ihr seid für Dreiecke überzeugt. Dann suchen wir nicht mehr, OB es immer klappt, sondern WARUM. Woran könnte das liegen?“

Wird die Erklärungsfunktion und die Zusammenhang-Herstellungs-Funktion des Begründens in den Vordergrund gerückt, so kann deutlich werden, welchen zusätzlichen Erkenntnisgewinn das Begründen hier bringt. Die Aufmerksamkeit geht von den allgemeinen Sätzen (Regeln) zu den Stützungen der Regeln. Wird im Zuge des Begründungsversuchs nun auch entdeckt, dass der Umkreismittelpunkt gerade als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten konstruiert werden kann, dann hat die Begründungsbemühung sogar zusätzliches Wissen generiert (Entdeckungs-Funktion). Die Verschiebung vom OB zum WARUM wird in der mathematikdidaktischen Diskussion daher als entscheidender Schritt betont (Hanna / de Villiers 2007, S. 2).

Auch in diesem Szenario entwickeln die Lernenden kein individuelles Beweisbedürfnis, doch muss die Frage erlaubt sein, ob dies wirklich so zentral ist. Wer würde daran leiden, dass Lernende von selbst kein Rechenbedürfnis haben? Die didaktische Energie sollte nicht zu sehr auf das Wecken von Beweisbedürfnis fokussiert sein, sondern auf *Sinnstiftung,* welche Ziele in Mathematik mit Begründen verfolgt werden. Die Wichtigkeit setzt die Lehrkraft durch die Etablierung einer entsprechenden Unterrichtskultur ebenso wie etwa die Wichtigkeit verschiedener Lösungswege.

Fazit 3: Eine Begründungskultur kann sich nicht erst etablieren, wenn alle Lernenden ein Bedürfnis nach Begründungen individuell verspüren, sondern wenn die Frage nach dem WARUM zu einem normalen (also als soziomathematische Norm gesetzten) Bestandteil des Unterrichts wird und sich Lernende daran gewöhnen. Sinnstiftung entsteht durch Transparenz der Funktionen des Beweisens.

4. Herausforderung: Soziale Dimensionen berücksichtigen

Wenn die Lernenden im Mathematikunterricht von selbst nach dem WARUM fragen, ist ein wichtiges Bildungsziel erreicht. In den meisten Klassen muss jedoch die Lehrkraft lange die Rolle übernehmen, Begründungen und speziell Explizierungen von Regeln und Stützungen einzufordern. Nach einigem Training ist dann das Ziel erreichbar, diese Verantwortung im Klassenzimmer gleichmäßiger zu verteilen, sodass auch Schülerinnen und Schüler untereinander Begründungen einfordern.

Das Einfordern von Regeln und Stützungen ist kognitiv anspruchsvoll, weil es auch die schnelle logische Durchdringung eines Arguments erfordert. Einfacher fällt es Lernenden, die Frage nach dem

WARUM zunächst im Rahmen der Diskussion von Lösungswegen zu stellen („Wieso hast du das so gerechnet, ich hab das ganz anders?“). So beschreibt Fetzer (in diesem Heft), wie Erst- bis Drittklässler lernen, sich über Rechenwege auszutauschen und Erläuterungen einzufordern. Auf dieser Basis kann dann die Komplexität und Qualität von Argumenten reifen.
Auch um die Qualität von Argumentationen zu erhöhen, ist es wichtig, authentische Kommunikationssituationen herzustellen: Die Kommunikationsfunktion einer Begründung kann nur schwer greifen, wenn der einzige Adressat der Begründung ausgerechnet die Person ist, die es sowieso längst besser weiß – die Lehrkraft. Wer dagegen einem Gegenüber auf Augenhöhe Ideen kommunizieren und erläutern muss, hat ein anderes Qualitätsmerkmal für seine Begründungen.

Fazit 4: Argumentieren kann in Lernsituationen, die auf sozialen Austausch untereinander setzen, gezielter angeregt werden als in lehrerdominierten Konstellationen. Die Moderation der Lehrkraft wird zur Überwachung der inhaltlichen und strukturellen Diskursqualitäten gebraucht, doch die Verantwortung für die Argumentationsdichte im Klassenzimmer kann geteilt werden.

Ausblick

Natürlich stellen sich Lehrenden und Lernenden auf dem Weg zum Begründenlernen viele weitere Herausforderungen, die umso relevanter werden, je höher man in den Klassenstufen kommt, z. B. die folgenden:

- Geeignete Daten für die Begründung der Konklusion überhaupt zu finden (Problem der Beweisfindung, vgl. Holland 2007): Dazu zeigen Meyer/Voigt in diesem Heft, wie eng Entdecken, Begründen und Begründungsansätze verwoben werden können.
- Mehrschrittige Begründungen zusammenzusetzen: Dabei entstehen oft Schwierigkeiten, wie mehrere Argumente logisch stimmig angeordnet werden können (ohne Argumentationslücke und ohne Zirkelschlüsse)
- Das hypothetische Argumentieren und Denken:

  „Nehmen wir mal an, du hast Recht und in jedem Dreieck halbieren die Höhen die Seitenlängen. Was würde daraus für die Winkel im Dreieck folgen?“

  Das Arbeiten mit Hypothesen ist insbesondere in jüngeren Klassenstufen schwierig, weil Kinder als Daten nur Fakten akzeptieren, nicht aber Hypothesen. Wie hypothetisches Denken aufgebaut werden kann, zeigt Jahnke in diesem Heft.

Insgesamt halten wir fest: Ohne die Frage nach dem WARUM kann ein Unterricht kein authentischer Mathematikunterricht sein, denn diese Frage ist für das „Mathematik treiben an sich“ zentral. Das Umgehen mit dem WARUM gilt bei vielen Lernenden und Lehrkräften als schwierig, doch ist es lernbar, wenn eine Unterrichtskultur entwickelt wird, in der die Frage nach dem WARUM zur Selbstverständlichkeit wird. Dabei sollten zunächst Begründungen für einfache Zusammenhänge und ein breites Spektrum an Argumentationsbasen erlaubt sein. Später kann die Eignung von Argumentationsbasen gezielt reflektiert werden. Lehrkräfte können den Entwicklungsprozess am besten unterstützen, wenn sie die Struktur der individuellen Begründungen gut verstehen und adaptiv durch Impulse weiter bringen können.

Der Schwerpunkt des Begründens im Mathematikunterricht sollte selbst in der gymnasialen Oberstufe nicht auf formal-deduktivem Schließen in abstrakter Darstellung für komplexe Theoriebildungen verengt werden, sondern auf Argumentieren in sozialen Settings und inhaltlich-anschaulichen Begründungen mit beziehungsreichen, vielschichtigen Stützungen und Darstellungen. Dann kann die im Mathematikunterricht weiterentwickelte Kompetenz auch in außermathematischen Zusammenhängen fruchtbar gemacht werden.

Empfehlungen zum Weiterlesen

- Zur Rechtfertigung des Begründens: Hanna (1997)
- Zum inhaltlich-anschaulichen Beweisen: Blum/Kirsch (1989)
- Zum Methodenwissen zum Beweisen: Heinze/Reiss (2003)
- Zur Problematik, wann ein Beweis ein Beweis ist: Hersh (1993) und Wittmann/Müller (1988)
- Für Analysen mit weiteren Schemata und für unterschiedliche Beweistypen: Meyer (2007)
- Für Analysen mit dem Toulmin-Schema: Schwarzkopf (2000)
- Für einen sehr breiten Überblick zum Beweisen: Stein (1986)
- Zu unterschiedlichen Exaktheitsstufen: Wittmann/Müller (1990)
- Zur (sozialen) Entwicklung eines konkreten Beweises: Lakatos (1979)

Literatur

Almeida, Dennis (2001): Pupils' proof potential. In: Int. J. Math. Edu. Sci. Technol., 32(1), S. 53–60

Blum, Werner / Kirsch, Arnold (1989): Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum 'inhaltlichanschaulichen' Beweisen. In: Kautschitsch, H. / Metzler, W. (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, S. 199-209.

Blum, Werner / Kirsch, Arnold (1989): Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum „inhaltlich-anschaulichen" Beweisen. In: Metzler u. a. (Hrsg.): Anschauliches Beweisen, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 18, Teubner, Stuttgart, S. 199–209

Ernest, Paul (1998): Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, SUNY Press, New York.

Habermas, Jürgen (1999): Theorie des kommunikativen Handelns. Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Hanna, Gila (1997): The ongoing value of proof. In: Journal für Mathematikdidaktik, 18(2/3), S. 171-185.

Hanna, Gila / de Villiers, Michael (2007): ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education. Discussion Document, University of KwaZulu-Natal, ICM

Healy, Lulu / Hoyles, Celia (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, University of London

Heintz, Bettina (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer, Wien.

Heinze, Aiso / Reiss, Kristina (2003). „Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence." International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Spring 2003, S. 4–6.

Hersh, Reuben (1993): Proving is convincing and explaining. In: Educational Studies in Mathematics 24(4), S. 389-399.

Hersh, Reuben (1997): What is mathematics, really? Oxford University Press, New York.

Holland, Gerhard (2007): Geometrie in der Sekundarstufe. 3. Auflage. Franzbecker, Hildesheim.

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Hauptschule (Jahrgangsstufe 9). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. Luchterhand, München.

Lakatos, Imre (1979): Beweise und Widerlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg.

Lengnink, Katja / Leuders, Timo (2008): Probier's doch mal! Mit Beispielen experimentieren. In: PM 23(50), S. 1–6.

Meyer, Michael (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Müller, Gerhard / Wittmann, Erich (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Cornelsen, Berlin, S. 237–258.

Schwarzkopf, Ralph (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Franzbecker, Hildesheim.

Stein, M. (1986): Beweisen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Toulmin, Stephen (1996): Der Gebrauch von Argumenten. 2. Auflage. Beltz, Weinheim.

Villiers, Michael de (1990): The role and function of proof in mathematics. In: Pythagoras 24, S. 17–24.

Winter, Heinrich (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematikdidaktik 4(1), S. 59–95.

Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhard (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, S. 237-258.

Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhard (1990): When is a proof a proof, in: Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, 42(1), S. 15-42.

Verfassende

Dr. Michael Meyer
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Dortmund
mmeyer@math.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de