Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen

Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel

Susanne Prediger

Erschienen in Der Mathematikunterricht 57(3) 2011, 5-14.

1. Verschobener Forschungsfokus auf individuelle Vorstellungen

In den letzten zwanzig Jahren hat die didaktische Forschung und Entwicklung zunehmend stärker betont, dass zu Brüchen nicht nur Rechenfertigkeiten, sondern auch inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen erworben werden müssen, wenn Lernende mit Brüchen verständig und flexibel umgehen sollen (Streefland 1991, Malle 2004 u.v.m.). Mit dem didaktischen Konstrukt der Grundvorstellungen werden dabei stoffdidaktisch diejenigen Wissenselemente zu Interpretationen mathematischer Inhalte spezifiziert, die als Schnittstellen zwischen inhaltlichem Denken und Kalkül dienen (vom Hofe 1996); dies betrifft sowohl Grundvorstellungen für die Brüche selbst (wie zum Beispiel Teil eines Ganzen oder relativer Anteil), als auch Grundvorstellungen für die Bruchoperationen (wie die des Verfeinerns und Vergröberns für die Gleichwertigkeit von Brüchen) (Padberg 2009, Malle 2004). Neben Mustersituationen stellen Darstellungen die wichtigste (mentale) Repräsentation von Grundvorstellungen dar, wie zum Beispiel Rechteckbilder oder Brüchestreifen.

Entwickelt wurden zahlreiche diagnostische Aufgaben, mit denen die individuelle Verfügbarkeit von Grundvorstellungen erhoben werden kann, sowohl in großen standardisierten Untersuchungen (z.B. in Wartha 2007) als auch in Interviewsituationen (z.B. Wittmann 2006) und pragmatischeren diagnostischen Abfragen für die alltägliche Unterrichtspraxis (Prediger 2006). Untersuchungen mit diesen verschiedenen Instrumenten zeigen – auch international -, dass der Vorstellungsaufbau in der Unterrichtspraxis nicht überall gelingt (Aksu 1997, Hartnett / Gelman 1998, Prediger 2008).

Parallel wurden zahlreiche praktische Vorschläge zur Gestaltung eines vorstellungsorientierten Unterrichts formuliert (Streefland 1991, Winter 1999, u.v.a.). Ebenso wie die diagnostischen Aufgaben nutzen auch die Unterrichtsvorschläge immer wieder Darstellungswechsel zwischen symbolischem Ausdruck, graphischer Darstellung, evtl. Material und vor allem verbal beschriebener Situation, um Verständnis aufzubauen (Lesh 1979).

Während allerdings das empirische Wissen zu defizitären Lern*ständen* weit ausdifferenziert und zum Teil durch Rückgriff auf allgemeine Lehr-Lern-Theorien erklärt ist (z.B. Prediger 2008), sind (anders als für andere mathematische Themengebiete) die praktischen Unterrichtvorschläge zu Brüchen hinsichtlich ihrer Wirkungen auf die Vorstellungsentwicklungs*prozesse* auf der Mikroebene im deutschsprachigen Raum bislang relativ wenig beforscht (die wenigen Ausnahmen werden in Abschnitt 2.1 eingeordnet).

Der in diesem Beitrag vorzustellende Forschungsansatz geht von der forschungsprogrammatischen These aus, dass eine weitere Beforschung der defizitären Lern*stände* zurücktreten sollte, zugunsten der intensiveren Beforschung von Lern*prozessen* in ihren individuellen Verläufen, Bedingungen und Hürden auf der Mikroebene der ganz konkreten, zeitlich begrenzten Detailprozesse. Denn gerade diese Art empirischer Forschung, die auch die situativen Veränderungspotentiale einbezieht, kann einen ertragreichen wissenschaftlichen Hintergrund für eine fundierte Optimierung von Lernarrangements bieten, die schließlich in Schulbücher, Lehrerfortbildungen etc. Einzug erlangen. Der forschungsprogrammatische Ansatz zur Verschiebung des Forschungsfokus von der Erhebung von Lernständen hin zur systematischen Beforschung von Vorstellungsentwicklungsprozessen in gezielt gestalteten Lernarrangements soll in diesem Beitrag durch Explizierung seiner theoretischen und methodischen Hintergründe (Abschnitt 2) und durch exemplarische Einblicke in eine entsprechende Studie (Abschnitt 4), am Beispiel eines Lernarrangements zur Gleichwertigkeit und zum Vergleich von Brüchen (Abschnitt 3) und ihrer Konsequenzen (Abschnitt 5) untermauert werden.

2. Vorstellungsentwicklungsprozesse als Thema gegenstandsspezifischer Entwicklungsforschung – Theoretische und methodische Hintergründe

2.1 Lehr-lerntheoretischer Hintergrund zur Entwicklung individueller Vorstellungen

Der Forschungsansatz greift zurück auf eine Theorie der Vorstellungsentwicklung auf konstruktivistischer Basis (Gerstenmaier / Mandl 1995), die andernorts formuliert wurde (Prediger 2008). In genetischer Tradition werden dazu Lernarrangements entwickelt, in denen Lernende durch die Bearbeitung *genetischer Probleme* mit geeigneter Unterstützung die fachlich intendierten Konzepte und die zugehörigen Grundvorstellungen konstruieren sollen (Leuders / Hußmann / Barzel / Prediger. 2011).

Für die Analyse der Lernverläufe wird (in Abgrenzung zum hier rein normativ verstandenen ‚Grundvorstellungskonzept') auf die deskriptive Kategorie der ‚individuellen Vorstellungen' fokussiert. Individuelle Vorstellungen aktivieren Lernende in der Vorschauperspektive zunächst nicht zu fertigen mathematischen Konzepten, sondern nur zu denjenigen lebensweltlichen Situationen, in denen diese Konzepte zur Strukturierung genutzt werden könnten und die in den konstruierten Kontextproblemen angelegt sind. In Anlehnung an Kattmann und Gropengießer (1996, S. 182) werden individuelle Vorstellungen daher als mentale Konstrukte unterschiedlicher Komplexitätsebenen verstanden, die Lernende zur individuellen Strukturierung von Situationen (in Kontextproblemen oder davon abstrahierten Anschauungsmitteln) heranziehen. Für die Untersuchung der Vorstellungsentwicklung sind folgende Forschungsfragen zentral:

- Welche individuellen Vorstellungen und Darstellungen aktivieren die Lernenden zur Strukturierung von Situationen?
- Welche individuellen Verläufe nehmen die Vorstellungsentwicklungsprozesse der Ausdifferenzierung und Erweiterung von individuellen vorunterrichtlichen Vorstellungen hin zu fachlich intendierten Vorstellungen?
- Welche Hürden sind in diesem Prozess zu überwinden, welche Anlässe und Mittel (Darstellungen, Materialien, Impulse,...) wirken dabei unterstützend?

2.2 Forschungsprogramm der iterativen Entwicklungsforschung mit dem Ziel der Ausarbeitung gegenstandsspezifischer Theorien der Vorstellungsentwicklung

Die Beforschung der Vorstellungsentwicklungsprozesse bettet sich in der Dortmunder Arbeitsgruppe ein in das Forschungsprogramm iterativer Entwicklungsforschung in der Tradition des niederländischen Design Research (Gravemeijer / Cobb 2006), in dem zwei wichtige Arbeitsbereiche iterativ aufeinander bezogen werden: Zum einen die *Entwicklung* von Lernarrangements im Sinne einer Design Science (Wittmann 1992), zum anderen empirische, meist qualitative *Forschung* zur Gewinnung vertiefter Erkenntnisse über typische Lernverläufe. Diese Forschung wird durch Design-Experimente in theoriebasiert gestalteten Lernarrangements vollzogen, um nicht didaktische Stärken und Probleme des *alltäglichen* Unterrichts, sondern Aussagen über Potentiale und Grenzen innovativer Ansätze zu rekonstruieren. Gravemeijer und Cobb (2006) beschreiben das zweite Ziel neben der Optimierung von Lernarrangements so: „creating innovative learning ecologies in order to develop local instruction theories on the one hand, and to study the forms of learning that those learning ecologies are intended to support on the other hand" (Gravemeijer / Cobb 2006, S. 17). Da eine solche „local instruction theory" (2006, S. 21) Aussagen zu möglichen Lernwegen in Beziehung setzt zu Lernanlässen und möglichen Hilfsmitteln, wird sie hier als Lehr-Lerntheorie statt als instruction theory bezeichnet. Das Attribut „local" betont dabei die Gegenstandsspezifität der generierbaren Erkenntnisse, im hier vorgestellten Fall ist sie also bezogen auf Lernwege im Lernarrangement zu Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen.

Diese kurze Charakterisierung macht deutlich, was die Analyse von Vorstellungsentwicklungsprozessen im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (Design Research) von existierenden deutschsprachigen Studien zu Vorstellungsentwicklungsprozessen bei Brüchen unterscheidet: Wenn etwa Bikner-Ahsbahs (2001) Szenen unterrichtlicher Interaktionen zu verschiedenen Vorstellungen für Brüche untersucht, so wählt sie als Forschungsfeld gezielt *alltäglichen* Unterricht, um genau über diesen mehr zu erfahren. Design-Experimente dagegen bilden nicht unterrichtlichen Alltag ab, auch wenn sie ökologische Validität herstellen. Wenn Hasemann und Mangel (1999) individuelle Denkentwicklungen bei der Einführung von Brüchen untersuchen, so haben sie zwar ebenfalls die Lerngelegenheiten gezielt konstruiert, doch werden statt *Prozessen auf der Mikroebene* mehrfache Zwischenstände untersucht, was die Betrachtung längerer Zeiträume ermöglicht. Wenn Wittmann (2006) in Interviews die Denkprozesse von vorstellungsintensiven Aufgabenbearbeitungen von Hauptschülern untersucht, so erfasst er damit facettenreich situative Denkprozesse auf verschiedenen Ebenen, ohne allerdings über einen z.B. dreiwöchigen Zeitraum die Entwicklung der individuellen Vorstellungen zu rekonstruieren und ohne daraus Rückschlüsse für die Weiterentwicklung von Lernarrangements für etwas größere inhaltliche Einheiten zu ziehen. Dieser Vergleich zeigt, was der hier gewählte Forschungsansatz jeweils auch weniger leisten kann als die zitierten Studien.

2.3 Forschungskontext und Untersuchungsdesign der Fallstudie

Die Entwicklungsforschungsstudie zum Vergleich von Brüchen ist eingebettet in den Forschungskontext des zehnjährigen Forschungs- und Entwicklungsprojekts KOSIMA, in dem für alle Themen der Sekundarstufe I vorstellungsbezogene Lernarrangements entwickelt und beforscht werden (Hußmann / Prediger / Barzel / Leuders 2011). Auf der Basis empirischer Ergebnisse zu Lernständen bei Brüchen wurden Lernarrangements entwickelt, die in kleinen Teilen informell erprobt und dann systematisch in Erprobungsmaterialien für ein größeres Unterrichtsexperiment verschriftlicht wurden. Im iterativen Prozess des Aufeinanderbeziehens von Forschung und Entwicklung gehen die

Untersuchungsergebnisse in die Weiterentwicklung des Materials ein. Langfristiges Ziel ist die Publikation des Schulbuchs *mathewerkstatt* für die Klassen 5-10 zusammen mit einem Handbuch, das die wichtigsten Aspekte der generierten Lehr-Lern-Theorien über Vorstellungsentwicklungsprozesse für Lehrkräfte nutzbar macht (Prediger / Barzel / Hußmann / Leuders 2012).

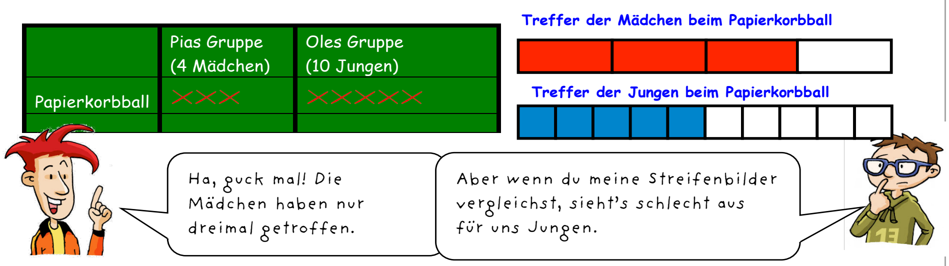
Das Unterrichtsexperiment zu Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen wurde in sieben Klassen der Jahrgangsstufe 6 unterschiedlicher Schulformen durchgeführt. Von allen Klassen wurden Schriftdokumente der Lernenden (Hefte, Hausaufgaben, Arbeiten) erfasst, in zwei Klassen zentrale Unterrichtsprozesse videographiert. Zur vertieften Datenerhebung wurden mit insgesamt 24 Kindern halbstrukturierte Paarinterviews durchgeführt. Während die Interviewdaten vertiefte Einblicke in die Prozesse auf der Mikroebene boten, ermöglichten die weiteren Klassen eine Einordnung der Phänomene in größerer Breite. Die Unterrichts- und Videodaten wurden ausschnittweise transkribiert, zu den vorhandenen Schriftdokumenten der Lernenden in Beziehung gesetzt und mit interpretativen Verfahren ausgewertet. In diesem kleinen Beitrag werden an exemplarischen Szenen aus Interviews mit zwei Mädchen fallstudienartig das grundsätzliche Vorgehen und exemplarische Ergebnisse gezeigt. Die dafür relevanten Teile des beforschten Lernarrangements werden in Abschnitt 3 vorgestellt.

3. Das Lernarrangement ‚Trefferquoten in der Streifentafel' und seine Hintergründe

Das Lernarrangement ‚Trefferquoten in der Streifentafel' ist Teil eines Kapitels zu Vergleich, Gleichwertigkeit und Addition von Brüchen (Glade / Prediger / Schmidt 2012). Es beginnt mit der Frage, wie man Trefferquoten in einem Wurfwettbewerb fair vergleichen kann, wenn die Wurfzahlen unterschiedlich sind. Dieses Kontextproblem veranlasst die Lernenden, das Konzept der relativen Häufigkeiten nach zu erfinden. Hilfestellung dazu gibt (nach einer anfänglich sehr offenen Phase) die fokussierende Aufgabe in Abb. 1. Durch Vorgabe von Streifenbildern wird eine Darstellung zum Vergleich relativer Häufigkeiten angeboten und somit die Grundidee der relativen Häufigkeit graphisch strukturiert.

Wie kann ich Häufigkeiten fair vergleichen?

a) Im Sportunterricht sind die Mädchen und die Jungen in Kleingruppen gegeneinander angetreten. Hier sind die Ergebnisse der Gruppen von Pia und Ole beim Papierkorbball. Wer hat deiner Meinung nach besser getroffen?



b) Zu welchem Ergebnis kommt Ole wohl mit seinen Streifen, wer besser getroffen hat?
c) Warum zeichnet er die beiden Streifen gleich lang?
d) Stelle weitere Ergebnisse wie Ole dar und entscheide, wer besser war.

Abb. 1: *Einführung der Streifenbilder als Darstellung für das Vergleichen über Anteile*

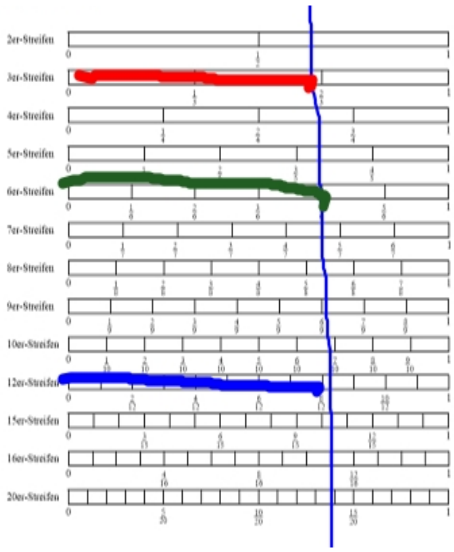


***Abb. 2**: Streifentafel als Anschauungsmittel*

Oles Streifenbilder aus Abb. 1 werden zum Ausgangspunkt für die Einführung der großen Streifentafel (vgl. angedeutete Nutzung in Abb. 2). An diesem für das Lernarrangement zentrale Anschauungsmittel können die Kinder Trefferquoten und abstrakte Brüche vergleichen, gleichwertige Brüche finden und später auch Brüche addieren.

Im weiteren Verlauf muss sich das Nachdenken über Anteile sowohl ablösen von dem Kontext der Trefferquoten als auch – im Zuge der fortschreitenden Schematisierung nach Treffers (1983) - von dem Anschauungsmittel der Streifentafel, damit Vergleich und Suche gleichwertiger Brüche auch kalkülhaft möglich werden (Prediger 2006).

Der nächste Abschnitt gibt Einblicke in Vorstellungsentwicklungsprozesse hin zur Schematisierung, andere Teilaspekte des komplexen Prozesses wurden andernorts vorgestellt, zum Beispiel inwiefern der Zugang für Lernende sinnstiftend ist (Prediger / Glade / Schmidt 2011) und welche abweichenden individuellen Strukturierungen beim Erfinden der relativen Häufigkeiten auftauchen können (zum Beispiel die in Abschnitt 4.2 rekonstruierte Strategie des Fehltrefferzählens, vgl. Prediger 2011).

4. Einblicke in initiierte Lernprozesse: Fehlende Vernetzungen als Hürde

4.1. Nutzung von Kontext und Streifentafel im Überblick

Beim Suchen von Vergleichswegen für die Treffer unterschiedlicher Gruppen entstand in allen Klassen schnell die zunächst nicht quantifizierte Idee, dass die Gesamtzahl der Würfe in die Bewertung der Treffer einbezogen werden sollte. Carla schreibt etwa „Weil sie mehr Versuche hatten, konnten sie auch mehr treffen.“ Darauf aufbauend wurde in allen Klassen der Vergleichsweg über die Streifentafel erfolgreich erarbeitet, wenn auch einige Lernende parallel ihre Vergleichswege beibehielten (vgl. Abschnitt 4.2). Die Darstellung der Treffer in den Streifen mit normierter Länge (vgl. Abb. 3 oben) ermöglichte den Kindern, ihre erste Idee des Einbezugs der Gesamtzahl weiter zu entwickeln und damit den konzeptionellen Kern des Konzepts relative Häufigkeit zu operationalisieren.

Insgesamt erwies sich die Streifentafel im Unterrichtsexperiment als sehr instruktive Darstellung. Beschrieben mit Folienstiften auf einer Klarsichthülle, konnte die Kopiervorlage immer wieder als Anschauungsmittel benutzt werden, an dem die Kinder aller sieben untersuchten Klassen schnell lernten, Brüche zu vergleichen und gleichwertige Brüche zu finden, auch wenn die sprachlichen Ausdrucksmittel noch nicht so weit entwickelt waren, wie etwa bei Charlotte, die sich auf die Streifen in Abb. 3 bezieht und im Wesentlichen durch Zeigen begründen kann, dass 1 von 3 und 2 von 6 gleich sind:

31	C	Weil wenn man hier so nimmt [*legt ihren Finger im Streifenbild als Begrenzung neben Tills und Merves Bruchstreifen*], dann ist das hier so gleich bei denen [*zeigt auf Tills und Merves Bruchstreifen*] so.

Durch die Anbindung des Vergleichs von Brüchen an den Kontext der Trefferquoten und die Darstellung der Streifentafel tauchten typische Vergleichsfehler wie der alleinige Vergleich der Nenner statt der Brüche (Padberg 2009, S. 67f) deutlich weniger im Unterricht auf, zeigen die Analysen. Dass allerdings nicht immer auch die konzeptionellen Ideen hinter der Streifentafel klar wurden, zeigt das Fallbeispiel in Abschnitt 4.2.

Für die Bildung des Konzepts der Gleichwertigkeit bewährte sich die Streifentafel, weil viele Kinder darin gut argumentieren konnten. Beim Übergang vom Finden gleichwertiger Brüche an der Streifentafel zum Finden auf Kalkülebene entdeckten sie die Zahlbeziehungen gleichwertiger Brüche für den Spezialfall der Verdopplung und argumentierten über ihr Zustandekommen: „Doppelt so viele Kästchen, doppelt so viele markierte“. Um zu verstehen, warum dennoch einige Kinder nicht alle Vorstellungen erfolgreich aufbauen konnten, lohnt sich der intensivere Blick auf ein Fallbeispiel zu einer typischen Hürde.

4.2. Fehlende Vernetzung als Hürde – Das Fallbeispiel von Anna und Jasmin

Das Transkript zum Fallbeispiel von Anna und Jasmin stammt aus der Masterarbeit Bosseck / Scharenberg (2010) und wurde für diesen Beitrag reanalysiert. Das Interview fand nach Einführung der Streifentafel im Unterricht statt.

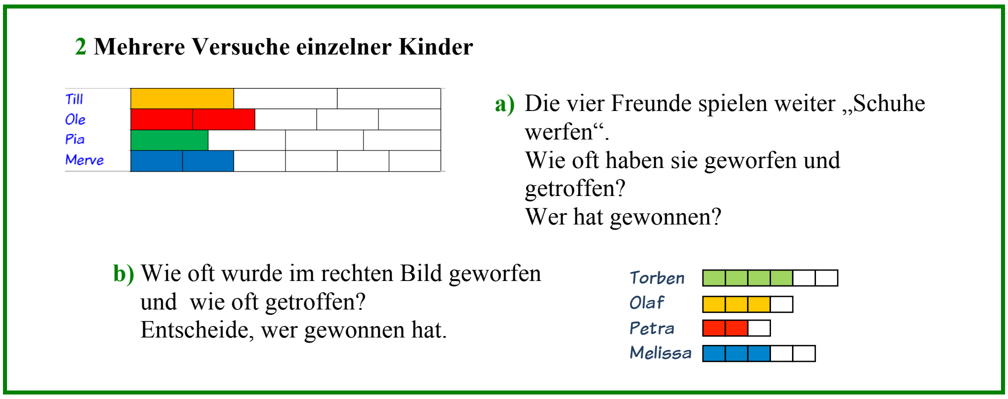


***Abb. 3**: Aufgabenstellung zum Vergleich von Häufigkeiten mit der Streifentafel*

Aufgefordert, in Aufgabe 2a aus Abb. 3 den besten Torschützen zu finden, ermitteln Anna und Jasmin an den Streifen in Minute 1:44 des Interviews Ole als Sieger, weil dessen Streifen am weitesten geht.

9	A	Wenn man jetzt hier 'ne Linie ziehen würde, wäre auch Ole am weitesten.
...		

Als sie diese Entscheidung für Ole erklären sollen, wechseln sie allerdings von dem Referenzkontext der Streifentafel in den Referenzkontext des Wettbewerbs und seiner Trefferquoten und greifen statt auf Anteilsbetrachtungen auf den dazu konkurrierenden Vergleichsweg des Fehltrefferzählens zu:

27	I	Mhm, könnt ihr das näher erklären warum? *(2 Sek. Pause*)
28	A	Weil erst mal, der hat die fast kleinsten, ja… (*7 Sek. Pause*)
29	I	Weil der hat ja auch nur 2 nicht getroffen (*zeigt auf Till*). Der hat 3 nicht getroffen. (*zeigt auf Ole*).
30	A	Ja, der hat 2 nicht getroffen, der hat 3 nicht getroffen, der hat nicht 3 und der hat 4.*(zeigt auf alle der Reihe nach)*
31	A	Dann hat der Till doch gewonnen!

Diesen Vergleichsweg des Fehltrefferzählens hatten zu Beginn der Unterrichtseinheit einige Kinder aktiviert (in Prediger 2011 sind weitere abweichende Vorstellungen dokumentiert). Die meisten anderen Kinder haben diese subtraktive Strukturierung der Situationen bei weiterer Reflexion verworfen, weil sie „irgendwie doch nicht fair" ist. Dagegen scheinen Anna und Jasmin sich zwar den Vergleichsweg an der Streifentafel als weiteren Vergleichsweg zusätzlich angeeignet zu haben, ohne allerdings den subtraktiv strukturierten Vergleichsweg des Fehltrefferzählens zu problematisieren oder in Beziehung zu setzen zu den anteilsbezogenen Strukturierungen, die der Streifentafel zugrunde liegen. Auch in der Interviewsituation gelingt es den Mädchen und ihrer Interviewerin nicht, die beiden Vergleichswege in Beziehung zu setzen, und so bleiben beide Strukturierungen der Situation nebeneinander bestehen, ohne eine Vernetzung der Darstellung in der Streifentafel mit der Situation der Trefferquoten herzustellen.

Dies führt dazu, dass sie in Aufgabe 2b (vgl. Abb. 3) zunächst direkt von den Streifen ablesen, obwohl deren Länge nicht normiert ist. Darauf aufmerksam gemacht, dass dies nicht stimmt, übersetzen sie die Graphik in die Streifentafel und können ihr Vorgehen auch auf technischer Ebene verbalisieren, ohne allerdings die konzeptuellen Gehalte wirklich durchdrungen zu haben:

131	A	Da sind halt immer, ähm (*schaut aufs Streifenblatt, wechselt dann zur Graphik in der Aufgabe*), ja man muss halt zählen, wie viele da drin sind, da sind hier jetzt 6. Dann nimmt man den Sechserstreifen (*zeigt aufs Streifenblatt*) und markiert so viele, wie da (*in der Graphik*) markiert sind. Und dann sieht man das besser, einfach. (*3 Sek. Pause*)

Diese fehlenden Vernetzungen in den Darstellungen und Strukturierungen stellt auch im weiteren Verlauf für die beiden eine unüberwindbare Hürde für einen vorstellungsfundierten Prozess der Schematisierung dar. Zwar können die beiden die Streifentafel auf der technischen Ebene gut zum Vergleich und Auffinden gleichwertiger Brüche nutzen, doch verbinden sie das Vorgehen nicht mit inhaltlichem Denken. Dies zeigt sich besonders, als sie in der übernächsten Interviewsequenz (ab Minute 20:50) aufgefordert sind, zu 3/4 gleichwertige Brüche zu finden. Sie tun dies korrekt, indem sie auf der Streifentafel Striche ziehen:

230	A	9/12 hier, ne? (*malt Punkt auf Zwölferstreifen auf Höhe 3/4 und zieht dann Strich*) Mhm, ja, das ist, 'ne 6/8, aber das, <u>das</u> kommt hin! (*legt noch mal das Lineal senkrecht an und vergleicht die Längen der ausgemalten Flächen der einzelnen Streifen12 Sek. Pause*)
231	I	(*J beobachtet die ganze Zeit was A. macht und murmelt etwas*)
232	A	Ne, das handelt sich ja nur um nen Millimeter.

Annas Unsicherheit, ob der Strich tatsächlich die 6/8 trifft, zeigt deutlich, dass sie ihre zeichnerische „Entdeckung" nicht durch Heranziehung anderer Ebenen absichert. Andere Kinder sichern dies durch Verknüpfung mit dem Kontext der Trefferquoten ab, z.B. so: „3 von 4, das ist wie 6 von 8, weil wer doppelt so viel wirft, muss auch doppelt so viel treffen." Statt ein strukturelles Verständnis der Beziehungen beider Brüche zueinander zu entwickeln, benutzen die beiden Mädchen die Streifentafel hier für *rein empirische Begründungen.* Solche empirischen Begründungen an Anschauungsmitteln haben sich auch in anderen Gebieten als zu beschränkt erwiesen (vgl. Steinbring 1994). Dies zeigt sich bei Anna und Jasmin deutlich, als sie im Zuge der fortschreitenden Schematisierung aufgefordert sind, aus ihren empirischen Erfahrungen von konkret gefundenen gleichwertigen Brüchen eine syntaktische Regel zu finden. Statt die Struktur der Zahlbeziehungen in der Streifentafel zu nutzen, ziehen sie die Regel allein aus den beteiligten Ziffern und stellen fest, dass hier Reihen vorliegen. Die folgende Szene setzt bei Minute 27:17 ein:

295	A	Ja, Zähler und Nenner müssen immer gleich sein. Also das heißt, 3/5 ist das Doppelte von 6/10. Also wäre dieser Bruch hier jetzt gleich. So, und das von... (*8 Sek. Pause*)
296	I	Wäre das mal 5? (*3 Sek. Pause – zeigt mit dem Finger abwechselnd auf zwei Streifen*)
297	A	Ok.
298	I	5 mal 3 sind 15, 3 mal 3 sind 9. (*23 Sek. Pause*)
299	A	Ich trag das mal hier ein. (*schreibt 12/20 unter Streifen*) (*22 Sek. Pause.*)
300	A	Also 'ne richtige Erklärung fällt mir da jetzt nicht ein.
301	I	Also das ist sozusagen 'nen bisschen von der Dreierreihe der Zähler, 3, 6…
302	A	...6, 9, 12. Aber das ist ja je… Ja, wie soll man das erklären? (*5 Sek. Pause*)
303	A	Ist einfach so! So, wie Banane Banane heißt, ist das jetzt halt so. (*lachen beide*)

Annas Äußerung in Zeile 303 zur Unmöglichkeit, für die empirisch entdeckten Beziehungen zwischen den Ziffern wiederum eine Begründung zu finden, ist expliziter Ausdruck der Beschränktheit rein empirischer Begründungen. Während andere Kinder formulieren können, dass sich ja die Zahl aller Kästchen verdoppelt, also auch die der markierten Kästchen, verharren Anna und Jasmin rein in der empirischen Entdeckung, ohne theoretische Bezüge herzustellen.

Anna und Jasmin sind kein Einzelfall, in vielen der rekonstruierten Lernprozesse zeigte sich diese fehlende Verknüpfung der Begründungen mit strukturellen Überlegungen als (wenn auch meist überwindbare) Hürde. Diese Hürde in der Nutzung von Anschauungsmitteln ist zwar für die Grundschul-Arithmetik immer wieder beschrieben worden (z.B. Steinbring 1994, Krauthausen/Scherer 2007, S. 250), wird jedoch in der Bruchrechnung in vielen handlungsorientierten Zugängen zu wenig beachtet. So kann diese Szene aus einer Lernprozessstudie einen Beitrag zur Weiterentwicklung der lokalen Lehr-Lerntheorie leisten, indem die Notwendigkeit des expliziten Lernschritts festgehalten wird, auch strukturelle Beziehungen der Brüche in die Anschauungsmittel hineinzulesen. Dieser Schritt muss durch entsprechende Impulse gezielt angeleitet werden, wenn inhaltliches Denken an der Streifentafel den Erweiterungs-Kalkül tatsächlich stützen soll.

5. Ausblick: Konsequenzen und weitere Forschungsperspektiven

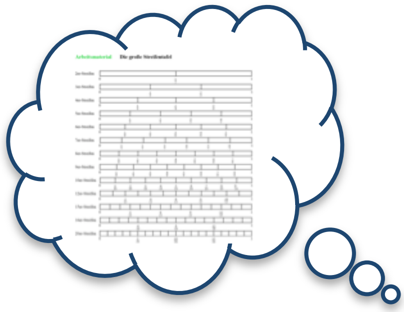
Es ist typisch für Design Research, empirische Ergebnisse über mögliche gegenstandsspezifische lernförderliche und lernhinderliche Konstellationen, wie sie in Abschnitt 4 exemplarisch vorgestellt wurden, in das iterierte Design einfließen zu lassen. So wurde zum Beispiel in der Weiterentwicklung des Lernarrangements ‚Trefferquoten in der Streifentafel' auf eine konsequentere Vernetzung der Darstellungen geachtet. Um im Prozess der Schematisierung das Hineinlesen struktureller Beziehungen in die Streifentafel noch gezielter anzuregen, wurde mit einer ergänzten Aufgabe (in Abb. 4) die

Verinnerlichung der Tätigkeiten an der Streifentafel als kopfmathematische Übung initiiert (vgl. Lorenz 1992 zu dieser Verinnerlichungsstrategie).

Insgesamt sind für die Untersuchung tatsächlich verlaufender Prozesse der Vorstellungsentwicklung im Zuge fortschreitender Schematisierung und gezielter Anregung von Darstellungsvernetzungen weitere empirische Studien nötig, die das Verständnis dieser Prozesse vertiefen. Für beide Bereiche der Vorstellungsentwicklung wurden in der Arbeitsgruppe der Autorin Studien begonnen (Prediger / Wessel 2011, Glade / Schink 2011), die im Laufe der nächsten Jahre weiter ausgebaut werden.

Die Streifentafel im Kopf

Man kann gleich große Brüche auch finden,
wenn man sich die Streifentafel nur im Kopf vorstellt.
Versuche das und lege dazu die Streifentafel zur Seite.



a) Stelle dir 2/3 markiert in einem Streifen vor.
Gehe im Kopf vom 3er Streifen zum feineren 6er Streifen.
Stelle dir darauf die Markierung für 2/3 vor.
Wie viele Teile sind damit auf dem 6er Streifen markiert?
Wie viele Sechstel sind also genauso groß wie 2/3?

b) Stellt euch zu zweit gegenseitig weitere Aufgaben:
Der erste sagt einen Bruch, der zweite nennt einen dazu passenden feineren Streifen.
Der erste muss darauf den gleich großen Bruch angeben.

c) Wie viele Fünfundzwanzigstel sind 3/5?
Erkläre, wie du das Ergebnis finden kannst,
auch wenn es nicht mehr vorstellbar ist.

***Abb. 4**: Ergänzte Aufgabe zur Verinnerlichung der Anschauung*

Literatur

Aksu, M. (1997): Student performance in dealing with fractions. In: Journal of Educational Research 90(6), 375-380.

Bikner-Ahsbahs, A. (2001): Eine Interaktionsanalyse zur Entwicklung von Bruchvorstellungen, im Rahmen einer Unterrichtssequenz. In: Journal für Mathematikdidaktik 22(3/4), 179-206.

Bosseck, J. / Scharenberg, D. (2010): Umgang mit Brüchen an der Streifentafel – Empirische Untersuchung. Masterarbeit an der TU Dortmund.

Glade, M. / Schink, A. (2011): Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen. Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung. In: Mathematik lehren 164, S. 43-47.

Glade, M. / Prediger, S. / Schmidt, U. (2012, im Druck): Freizeit von Mädchen und Jungen – Anteile vergleichen und zusammenfassen, erscheint in Prediger et al. 2012.

Gerstenmaier, J. / Mandl, H. (1995): Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. In: Zeitschrift für Pädagogik 41(6), 867-888.

Gravemeijer, K. / Cobb, P. (2006): Design research from the learning design perspective. In: van den Akker, J, Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. Routledge, London, 45-85.

Hartnett, P. / Gelman, R. (1998): Early Understandings of Number: Paths or Barriers to the Construction of new Understandings? In: Learning and instruction, 8(4), 341-374.

Hasemann, K. / Mangel, H.-P. (1999): Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr. In: Journal für Mathematikdidaktik, 20(2/3), 138-165.

Hußmann, S. / Prediger, S. / Barzel, B. / Leuders, T. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt. Erscheint in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2011. Münster, wtm Verlag.

Kattmann, U. / Gropengießer, H. (1996): Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In: Duit, R. / von Rhöneck, C. (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften, Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel, 180-204.

Krauthausen, G. / Scherer, P. (2007): Arbeitsmittel und Veranschaulichungen. In: dies.: Einführung in die Mathematikdidaktik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 240-263.

Lesh, R. (1979): Mathematical learning disabilities. In: R. Lesh / D. Mierkiewicz / M. G. Kantowski (Hrsg.): Applied mathematical problem solving. Columbus, OH, 111-180.

Leuders, T. / Hußmann, S. / Barzel, B. / Prediger, S. (Hrsg.) (2011): Das macht Sinn. Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 53(37).

Lorenz, J.-H. (1992): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterrricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Hofgrefe, Göttingen.

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, 4-8.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum-Verlag, Heidelberg.

Prediger, S. (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. In: Praxis der Mathematik in der Schule 48 (11), 8-12.

Prediger, S. (2008): The relevance of didactical categories for analysing obstacles in conceptual change - Revisiting the case of multiplication of fractions. In: Learning and Instruction 18(1), 3-17.

Prediger, S. (2011): Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Ausdifferenzierender Umgang mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten(Arbeitstitel). Erscheint in Praxis der Mathematik in der Schule 53(40).

Prediger, S. / Glade, M. / Schmidt, U. (2011): Wozu rechnen wir mit Anteilen? Herausforderungen der Sinnstiftung am schwierigen Beispiel der Bruchoperationen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 52(37), S. 28-34.

Prediger, S. / Barzel, B. / Hußmann, S. / Leuders, T. (2012, im Druck) (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin.

Prediger, S. / Wessel, L. (2012, im Druck): Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen: Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende. Erscheint in: Prediger, S. / Özdil, E. (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Waxmann, Münster.

Steinbring, H. (1994): Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4, 7-19.

Streefland, L. (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research, Kluwer, Dordrecht.

Treffers, A. (1983): Fortschreitende Schematisierung – ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. In: Mathematik lehren 1, 16-20.

vom Hofe, R. (1996): Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren 78, 4-8.

Wartha, S. (2007): Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs, Franzbecker, Hildesheim.

Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript, RWTH Aachen.

Wittmann, E.C. (1992): Mathematikdidaktik als „design science“. In: Journal für Mathematikdidaktik 13 (1), 55-70

Wittmann, G. (2006): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler?. In: mathematica didactica 29 (2), 49-74.