

# Foot points and total curvature

Ilijas Selimovic

8. Februar 2005

## Abstract

Global theorems represent the highlights of classical Differential Geometry. Prominent examples are Fenchel's, Milnor's, Schwarz's, Schur's theorems and Blaschke's rolling theorem. They build the scope of this work, in which we give sufficient conditions for the uniqueness of the foot point and nearest point from given coordinates to a regular  $C^2$  curve in  $\mathbf{R}^n$ . This is a criterion for the free rolling of balls on open space curves, which generalises Blaschke's rolling theorem to higher dimensions. Finally the results are applied to hypersurfaces.

Our main results are the theorems 2.5 and 3.2 for curves and theorems 4.2 and 4.3 for surfaces.

*Key words:* foot point, total curvature, curve, rolling theorem

## Zusammenfassung

Globale Sätze bilden die Höhepunkte der klassischen Differentialgeometrie. Prominente Beispiele sind die Sätze von Fenchel, Milnor, Schwarz, Schur und der Rollsatz von Blaschke, in deren Bereich sich diese Arbeit eingliedern lässt. Es werden Aussagen über die Eindeutigkeit von Lotfußpunkten und nächsten Punkten von gegebenen Koordinaten auf einer  $C^2$ -glatten regulären Kurve im  $\mathbf{R}^n$  vorgestellt. Dies ist auch ein Kriterium für das freie Rollen von Kugeln auf offenen Raumkurven, wodurch der Rollsatz von Blaschke höherdimensional verallgemeinert wird. Schließlich werden die Ergebnisse auf Hyperflächen angewendet.

Hauptresultate für Kurven sind die Sätze 2.5 und 3.2 und für Flächen die Sätze 4.2 und 4.3.

# 1 Totalkrümmung und der Satz von Fenchel

Wir werden den Satz von Fenchel für lediglich stetige Kurven einsetzen und benötigen daher eine allgemeine Definition der Totalkrümmung. Zunächst sollen die notwendigen Begriffe geklärt werden, wobei wir uns an die Terminologie von [1, Milnor] halten.

Im  $\mathbf{R}^n$  bezeichnen wir das Skalarprodukt als  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und den Winkel zwischen 0 und  $\pi$  als  $\angle(\cdot, \cdot)$ . Die Standardbasis sei  $e_1, \dots, e_n$ , und die Komponenten eines Vektors  $v$  seien  $v_1, \dots, v_n$ . Ein Polygonzug im  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 1$  ist eine endliche Folge von Punkten  $a_0, \dots, a_m$ , mit  $a_i \neq a_{i+1}$ . Ein Polygonzug heißt geschlossen, wenn  $a_m = a_0$  ist.

Zur Vereinfachung sollen Indizes, die nicht im definierten Bereich liegen, das kleinste entsprechende Residuum modulo des größten erlaubten Wertes bezeichnen.

Betrachte von nun an eine stetige Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Ein Polygonzug heißt einbeschrieben in  $\gamma$ , wenn es eine Menge von Parameterwerten  $t_i$  gibt, so dass  $t_i < t_{i+1}$  und  $\gamma(t_i) = a_i$ . Mit

$$\alpha_i := \angle(P_{i+1} - P_i, P_i - P_{i-1})$$

ist die Totalkrümmung eines Polygonzuges  $P$  definiert durch  $\kappa(P) := \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$  und die Totalkrümmung eines geschlossenen Polygonzuges durch  $\kappa(P) := \sum_{i=1}^m \alpha_i$ . Die Totalkrümmung der (geschlossenen) Kurve ist gegeben durch  $\kappa(\gamma) := \sup\{\kappa(P')\}$ , wobei  $P'$  über alle (geschlossenen,) in  $\gamma$  einbeschriebenen Polygonzüge läuft. Der folgende Satz rechtfertigt diese Definition der Totalkrümmung.

**Satz 1.1 ([2, Section 5.3])** *Für eine reguläre,  $C^2$ -glatte Kurve  $\gamma$  mit Krümmungsfunktion  $\kappa$ , gilt:*

$$\kappa(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa ds.$$

Wir wollen nun auf Kurven hinaus, die aus endlich vielen regulären Teilen zusammengesetzt sind.

**Satz 1.2 ([2, Theorem 5.1.3])** *Für jede Stelle  $t \in ]0, 1[$  gilt: Existiert  $\kappa(\gamma)$ , dann existieren auch  $\kappa(\gamma|_{[a,t]})$  und  $\kappa(\gamma|_{[t,a]})$  und umgekehrt. In diesem Fall existieren auch die Grenzwerte der Tangentenrichtungen von oben und von*

unten in  $t$ . Wird der Winkel zwischen den Grenzwerten als  $\alpha$  bezeichnet, dann gilt:

$$\kappa(\gamma) = \kappa(\gamma|_{[a,t]}) + \kappa(\gamma|_{[t,b]}) + \alpha.$$

Sei  $\gamma$  geschlossen und  $\gamma_o$  dieselbe Kurve, nur dass sie als offen betrachtet wird (für die Totalkrümmung). Damit  $\kappa(\gamma)$  existiert, ist es notwendig und hinreichend, dass  $\kappa(\gamma_o)$  existiert. In diesem Fall existieren die Grenzwerte der Tangentenrichtungen am Anfang und am Ende der offenen Kurve. Ist der Winkel zwischen ihnen bezeichnet als  $\alpha$ , dann gilt:

$$\kappa(\gamma) = \kappa(\gamma_o) + \alpha.$$

Sei  $\lfloor x \rfloor$  die Gauß-Klammer, also die zu  $x$  nächst kleinere oder gleiche ganze Zahl.

**Folgerung 1.3** Seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  reguläre  $C^2$ -glatte Kurven mit Definitionsbereichen  $[0, 1]$ , Krümmungsfunktionen  $\kappa_i$  und es gelte:  $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dann ist die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\Gamma : [0, k] \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (1.1)$$

$$\Gamma(t) = \gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor) \quad (1.2)$$

stetig und für ihre Totalkrümmung gilt:

$$\kappa(\Gamma) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \kappa_i ds + \sum_{i=1}^k \angle(\gamma'_i(1), \gamma'_{i+1}(0)). \quad (1.3)$$

**Beweis:** Die Stetigkeit ist offensichtlich. Wir betrachten die offene Kurve  $\Gamma_o$ , die entsteht, indem  $\Gamma$  an der Stelle 0 als offen betrachtet wird. Falls ihre Totalkrümmung existiert, gilt nach Satz 1.2:

$$\kappa(\Gamma) = \kappa(\Gamma_o) + \angle(\gamma'_k(1), \gamma'_0(0)).$$

Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion über  $k$ , dass  $\kappa(\Gamma_o)$  existiert und

$$\kappa(\Gamma_o) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \kappa_i ds + \sum_{i=1}^{k-1} \angle(\gamma'_i(1), \gamma'_{i+1}(0))$$

gilt, woraus sich dann die Aussage ergibt. Dazu sei  $\Gamma_o^l$  die, analog zu (1.1), aus  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  zusammengesetzte Kurve.

Für  $k = 1$  bekommen wir die Verankerung durch Satz 1.1. Ist  $k > 1$  wenden wir einmal Satz 1.2 an und zeigen damit

$$\kappa(\Gamma_o^k) = \kappa(\Gamma_o^{k-1}) + \kappa(\gamma_k) + \angle(\gamma'_{k-1}(1), \gamma'_k(0)).$$

Anwendung von Satz 1.1 auf  $\kappa(\gamma_k)$  und Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefern die Behauptung.  $\square$

Ist die Kurve  $\gamma$  geschlossen, dann heiße sie konvex, wenn sie in einer zwei-dimensionalen Ebene liegt und wenn jede Gerade, die mehr als zwei Punkte von  $\gamma([0, 1])$  enthält, ein ganzes Stück  $\gamma(I)$  mit  $\gamma$  gemeinsam hat, wobei  $I$  ein Teilintervall von  $[0, 1]$  ist. Damit lautet der Satz von Fenchel:

**Satz 1.4** ([1][Theorem 3.4]) *Falls  $\kappa(\gamma)$  existiert und  $\gamma$  geschlossen ist, gilt  $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$ . Die Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\gamma$  konvex ist.*

## 2 Lotfußpunkte und Totalkrümmung

Im Folgenden sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$  eine reguläre  $C^2$ -glatte Kurve mit Krümmungsfunktion  $\kappa$ .

Zunächst werden einige Konsequenzen des Satzes von Fenchel herausgestellt, die im Beweis des eigentlichen Satzes (2.5) eine zentrale Rolle spielen werden.

**Lemma 2.1** *Gibt es einen Punkt  $P \in \mathbf{R}^n$ , der nicht mit  $\gamma(0)$  oder  $\gamma(1)$  zusammenfällt, so dass gilt:*

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma'(0) \rangle = 0 \tag{2.4}$$

$$\langle \gamma(1) - P, \gamma'(1) \rangle = 0 \tag{2.5}$$

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma(1) - P \rangle = 0, \tag{2.6}$$

dann ist  $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn die zusammengesetzte Kurve, bestehend aus  $\gamma$ ,  $\overline{\gamma(1)P}$  und  $\overline{P\gamma(0)}$ , konvex ist.

**Beweis:** Wir betrachten die stückweise  $C^2$ -glatte geschlossene Kurve, die zusammengesetzt ist aus  $\gamma$  und den beiden Verbindungsstrecken zwischen den Endpunkten von  $\gamma$  und dem Punkt  $P$ . Wir stellen ihre Totalkrümmung mit Folgerung 1.3 als Summe der Totalkrmmungen der einzelnen Segmente und der Winkel an den Anschlussstellen dar. Da an den Verbindungen der Segmente nach Voraussetzung rechte Winkel herrschen und die Totalkrümmung

nach dem Satz von Fenchel mindestens  $2\pi$  sein muss, ergibt sich für die Totalkrümmung von  $\gamma$  ein Minimum von  $\frac{\pi}{2}$ . Die Aussage über die Gleichheit folgt ebenfalls aus dem Satz von Fenchel.  $\square$

**Lemma 2.2** *Ist  $\gamma(0) \neq \gamma(1)$  und:*

$$\langle \gamma(0) - \gamma(1), \gamma'(0) \rangle = 0$$

*dann ist  $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn die Kurve  $\gamma$  zusammen mit ihrer Sehne von Anfangs- bis Endpunkt konvex ist.*

**Beweis:** Wir betrachten die stückweise  $C^2$ -glatte geschlossene Kurve, die zusammengesetzt ist aus  $\gamma$  und der Verbindungsstrecke  $\overline{\gamma(1)\gamma(0)}$ . Nach dem Satz von Fenchel ist ihre Totalkrümmung mindestens  $2\pi$ . Da der Winkel in  $\gamma(0)$   $\frac{\pi}{2}$  ist, beträgt die Summe der Winkel an den Anschlussstellen maximal  $\frac{3\pi}{2}$ . Mit Folgerung 1.3 lässt sich also schließen, dass die Totalkrümmung von  $\gamma$  mindestens  $\frac{\pi}{2}$  ist. Die Gleichheit folgt aus dem Satz von Fenchel.  $\square$

**Lemma 2.3** *Ist  $\gamma(0) = \gamma(1)$  dann ist  $\kappa(\gamma) \geq \pi$ , wobei hier die Totalkrümmung der als offen betrachteten Kurve gemeint ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\gamma$  konvex ist.*

**Beweis:** Die Totalkrümmung der geschlossenen Kurve ist nach dem Satz von Fenchel mindestens  $2\pi$ . Sie lässt sich mit Satz 1.2 darstellen als Summe der Totalkrümmung der als offen betrachteten Kurve und des Winkels zwischen Anfangs- und Endtangente. Da kein Winkel  $\pi$  überschreiten kann, muss der zweite Summand mindestens  $\pi$  betragen, woraus sich die Aussage ergibt. Die Gleichheit wird direkt vom Satz von Fenchel geliefert.  $\square$

**Lemma 2.4** *Sei  $P \in \mathbf{R}^n$  sowie  $t_l \in [0, 1]$  mit*

$$\langle \gamma(t_l) - P, \gamma'(t_l) \rangle = 0$$

*und*

$$\|\gamma(t_l) - P\| \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) < 1. \tag{2.7}$$

*Dann liegt in  $t_l$  ein relatives Minimum des Abstandes von  $P$  und  $\gamma(t)$  vor.*

**Beweis:** Sei ohne Einschränkung  $\gamma$  normal und  $P$  der Ursprung. Dann gilt für  $f(t) := \|\gamma(t)\|^2$ :

$$\begin{aligned} f'(t_l) &= 0, \text{ wegen der Lotfußpunkteigenschaft} \\ f''(t_l) &= 2(\langle \gamma'(t_l), \gamma'(t_l) \rangle + \langle \gamma''(t_l), \gamma(t_l) \rangle). \end{aligned}$$

Ist entweder  $\gamma(t_l) = 0$  oder  $\gamma''(t_l) = 0$ , so ist  $f''(t_l)$  echt positiv, sonst gilt:

$$\begin{aligned} f''(t_l) &= 2 + 2\kappa(t_l)\|\gamma(t_l)\| \cos(\angle(\gamma''(t_l), \gamma(t_l))) \\ &> 0, \text{ wegen (2.7)}. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.5** Gegeben sei ein Punkt  $P \in \mathbf{R}^n$  für den gilt:

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma'(0) \rangle = 0 \quad (2.8)$$

$$\langle \gamma(1) - P, \gamma'(1) \rangle = 0, \quad (2.9)$$

und es gelte

$$\|\gamma(0) - P\| \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) < 1. \quad (2.10)$$

Dann ist  $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$ .

**Beweis:** Ist  $\gamma(0) = P$  oder  $\gamma(1) = P$ , so ergibt sich die Aussage aus dem Lemma 2.2 oder 2.3. Wir nehmen also das Gegenteil an und fordern weiterhin ohne Einschränkung, dass  $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}^n$  normal und  $P$  der Ursprung ist sowie  $\gamma(l)$  in Richtung  $e_1$  liegt. Weiterhin können wir davon ausgehen, dass

$$\|\gamma(0)\| < \|\gamma(l)\|, \quad (2.11)$$

da  $f(t) := \|\gamma(t)\|^2$  nach Lemma 2.4 in 0 ein lokales Minimum hat. Falls also (2.11) nicht erfüllt ist, gibt es eine Stelle  $t_* \in ]0, l[$ , an der das Maximum des Abstandes angenommen wird. Ersetzen wir die Kurve  $\gamma$  durch das Teilstück  $\gamma|_{[0, t_*]}$ , so sind die Voraussetzungen (2.9) und (2.10) weiterhin erfüllt und (2.11) ist gültig.

Betrachte den Abstand  $a(t) := \text{dist}(\gamma, G)$  der Kurve  $\gamma$  und der  $e_1$ -Achse  $G$ . Unterscheide dabei zwei Fälle:

1. Fall: Der Abstand  $a(t)$  nimmt ein Maximum in  $t_+ \in ]0, l[$  an.

Sei  $P_+$  der zu  $\gamma(t_+)$  nächste Punkt der Geraden  $G$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t_+) - P_+, \gamma(l) - P_+ \rangle &= 0 \\ \langle \gamma(t_+) - P_+, \gamma'(t_+) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.9), folgt die Behauptung aus Lemma 2.1 durch Anwendung auf  $\gamma|_{[t_+, l]}$  und  $P_+$ .

2. Fall: Das einzige Maximum des Abstandes  $a(t)$  liegt in 0 (beachte  $a(l) = 0$ ).

Betrachte das System

$$f(t, s) = \|\gamma(t) - s \cdot e_1\|^2 = \|\gamma(0)\|^2 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = -2\langle \gamma(t) - s \cdot e_1, e_1 \rangle \leq 0. \quad (2.13)$$

Beobachtung: Ist  $(t_0, s)$  eine Lösung von (2.12) und (2.13) und herrscht in (2.13) Gleichheit, so ist der Abstand von  $\gamma(t_0)$  und  $G$  gleich  $\|\gamma(0)\|$ . Dies ist allerdings mindestens so groß wie der Abstand von  $\gamma(0)$  und  $G$ . Wegen der Bedingung an diesen Fall ist  $t_0 = 0$ .

Die Lösungsmenge ist nicht leer ( $t = l, s = \|\gamma(l)\| - \|\gamma(0)\|$  ist eine Lösung) und kompakt. Wir können also eine Lösung  $(s_m, t_m)$  mit maximalem  $s$ -Wert wählen.

Zeige nun, dass  $t_m \neq 0$ .

Für  $t = 0$  ergeben sich in (2.12) die Lösungen  $s_0 = 0$  und  $s_1 = 2\langle e_1, \gamma(0) \rangle$ . Wenn (2.13) für  $(0, s_1)$  gültig ist, ist  $s_1 \leq 0$ . Da  $(l, \|\gamma(l)\| - \|\gamma(0)\|)$  eine Lösung mit größerem  $s$ -Wert ist, siehe (2.11), gilt  $t_m \neq 0$ .

Zusammen mit unserer Beobachtung können wir schließen:

$$-\langle \gamma(t_m) - s_m e_1, e_1 \rangle < 0.$$

Sei  $\sigma$  die lokale Auflösung von  $f(t, s) - \|\gamma(0)\| = 0$  nach  $s$  ( $s = \sigma(t)$ ), die wegen der gerade gezeigten Ungleichung nach dem Satz über implizite Funktionen lokal existiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma'(t_m) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t_m, s_m)}{\frac{\partial f}{\partial s}(t_m, s_m)} \\ &= \frac{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma'(t_m) \rangle}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn in  $t = l$  gilt (2.9) und in  $t \neq l$  liegt ein Extremum im Inneren vor. Dann

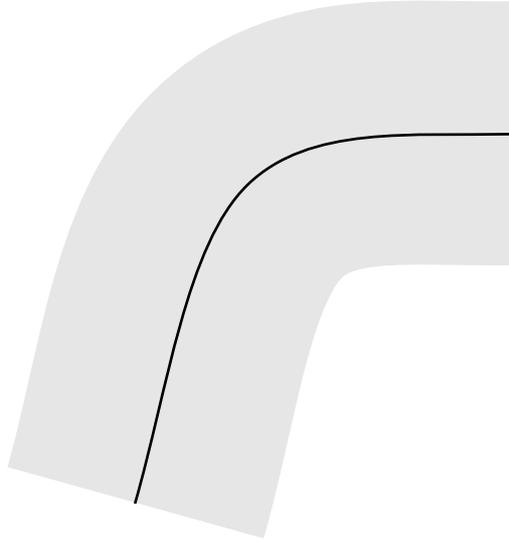


Abbildung 1: Bereich eindeutiger Lotfußpunkte

gilt weiter:

$$\begin{aligned}
 \sigma''(t_m) &= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_m, s_m)}{\frac{\partial f}{\partial s}(t_m, s_m)} \\
 &= \frac{\|\gamma'(t_m)\|^2 + \langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma''(t_m) \rangle}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} \frac{1 - \kappa(t_m)\|\gamma(0)\| \cos(\angle(\gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma''(t_m)))}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\
 &> 0, \text{ da } \kappa\|\gamma(0)\| < 1,
 \end{aligned}$$

was zeigt, dass hier ein Minimum vorliegt. Somit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Maximalität von  $(t_m, s_m)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.6** Wird in (2.10) die Gleichheit zugelassen, ist die Aussage nicht richtig. Beispielsweise würde dann ein beliebig kleines Stück eines Kreises mit seinem Mittelpunkt die Voraussetzungen erfüllen.

Anders formuliert, besagt Satz 2.5, dass Lotfußpunkte auf einer Kurve mit Totalkrümmung kleiner  $\frac{\pi}{2}$  eindeutig sind, wenn sie zu Punkten gehören, die in einer Schlauchumgebung um die Kurve mit Dicke  $\max_{t \in [0,1]} \kappa(t)$  liegen. Die Beschränktheit der Totalkrümmung lässt sich auch auf die Bogenlänge übertragen.

**Folgerung 2.7** *Unter der Voraussetzung von Satz 2.5 beträgt die Bogenlänge der Kurve mindestens  $\frac{\pi}{2 \max_{t \in [0,1]} \kappa(t)}$ .*

**Beweis:**

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_0^1 \kappa \|\gamma'\| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

□

### 3 Über das freie Rollen auf Raumkurven

Der Rollsatz von Blaschke liefert eine Aussage über das freie Rollen von konvexen Objekten ineinander. Für Raumkurven ist ein solcher Begriff nicht verfügbar. Mit der Aussage aus dem letzten Abschnitt lässt sich jedoch eine ähnliche Aussage folgern, in der die Totalkrümmung der Kurve durch  $\pi$  beschränkt wird.

**Lemma 3.1** *Gegeben sei eine Kugel um den Ursprung mit Radius  $R$ .  $\gamma$  habe den Anfangspunkt  $R \cdot e_1$  und berühre dort die Kugel, d.h.  $\langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ . Ist  $R \cdot \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) < 1$ , so kann  $\gamma$  nur dann den Zylinder unter der Kugel  $\{p \in \mathbf{R}^n \mid p_1 < 0 \text{ und } \|p - \langle p, e_1 \rangle e_1\| < R\}$  erreichen oder in die Kugel eintreten, wenn  $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$  ist.*

**Beweis:** Zeige zuerst, dass  $\gamma$  nicht wieder in die Kugel eindringt. Denn in 0 liegt nach Lemma 2.4 ein Minimum des Abstandes, weshalb es ein Maximum an einer Stelle  $t_m > 0$  geben muß. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle &= 0 \\ \langle \gamma(t_m), \gamma'(t_m) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Wegen Satz 2.5 muß  $\gamma$  dann eine Totalkrümmung von mindestens  $\frac{\pi}{2}$  haben.

Um in den Zylinder unter der Kugel einzudringen, muss  $\gamma$  aufgrund der Stetigkeit die zu  $e_1$  senkrechte Hyperebene schneiden. Der Abstand von  $\gamma$  zur  $e_1$ -Achse ist dort größer als  $R$ , da  $\gamma$  außerhalb der Kugel bleibt. Im Eintrittspunkt in den Zylinder unter der Kugel ist der Abstand zur  $e_1$ -Achse gleich  $R$  und für  $t = 0$  ist er Null, wodurch wir schließen können, dass er ein Maximum an einer Stelle  $t_* \in ]0, 1[$  annimmt. Sei  $P_*$  der zu  $\gamma(t_*)$  nächste Punkt auf der  $e_1$ -Achse. Dann können wir Lemma 2.1 auf  $\gamma|_{[0, t_*]}$  und  $P_*$  anwenden, womit die untere Schranke für die Totalkrümmung folgt. □

**Satz 3.2** Sei die Totalkrümmung von  $\gamma$  echt kleiner als  $\pi$  und ein  $R > 0$  gegeben mit  $R \cdot \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) < 1$ . Dann haben  $\gamma$  und jede sie berührende Kugel mit Radius  $R$  nur den einen Punkt gemein.

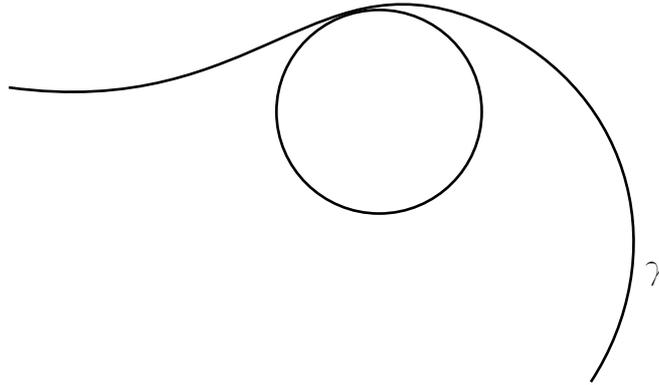


Abbildung 2: Freies Rollen

**Beweis:** An dem Berührungspunkt hat wegen Lemma 2.4 der Abstand der Kurve zu dem Mittelpunkt ( $P$ ) der Kugel ein Minimum. Wenn also  $\gamma$  die Kugel wieder schneidet, wird ein Maximum der Abstandsfunktion bezüglich  $P$  zwischen Berühr- und Rückkehrpunkt angenommen, weshalb sich dort ein Lotfußpunkt befindet. Betrachte nun den Punkt auf der Verbindung zwischen  $P$  und diesem Lotfußpunkt, der vom letzteren den Abstand  $R$  hat, siehe dazu Abbildung 2. Nehme ohne Einschränkung an, dies sei der Ursprung und der Lotfußpunkt liege in  $R \cdot e_1$ . Die Kugel  $K$  um den Ursprung mit Radius  $R$  berührt dann  $\gamma$  in  $R \cdot e_1$ . Da die ursprüngliche Kugel in der Vereinigung des Zylinders unterhalb von  $K$  und  $K$  selbst liegt, lässt sich Satz 3.1 anwenden, was zeigt, dass beide Teile von  $\gamma$ , die durch den Lotfußpunkt getrennt werden, eine Totalkrümmung von mindestens  $\frac{\pi}{2}$  haben. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass die Totalkrümmung der Kurve kleiner ist als  $\pi$ .  $\square$

**Folgerung 3.3** Unter der Voraussetzung von Satz 3.2 beträgt die Bogenlänge der Kurve mindestens  $\frac{\pi}{\max_{t \in [0,1]} \kappa(t)}$ .

**Beweis:**

$$\pi \leq \int_0^1 \kappa \|\gamma'\| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

$\square$

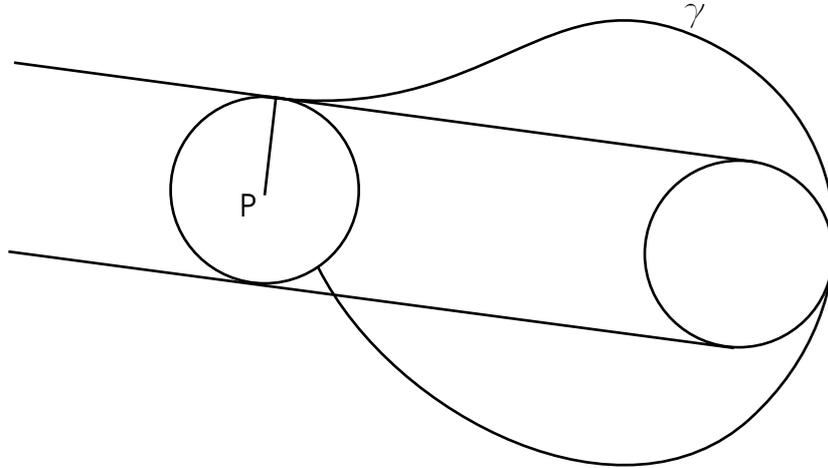


Abbildung 3: Konstruktion des Beweises zu Satz 3.2

## 4 Anwendung auf Hyperflächen im $\mathbf{R}^n$

Sei  $M$  eine  $C^3$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n-1$ ,  $n \geq 2$  und  $x : M \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine Immersion. Ist  $N$  ein Normaleneinheitsvektorfeld, so sind die erste und zweite Fundamentalform gegeben durch

$$I = \langle dx \otimes dx \rangle$$

$$II = \langle dx \otimes dN \rangle.$$

Den geometrischen Tangentialraum an der Stelle  $p$  bezeichnen wir mit  $T_p M$ . Wir betrachten eine Teilmenge  $C$  von  $M$ , die konvex ist in dem Sinne, dass je zwei Punkte durch eine Geodätische verbunden werden können, die in  $C$  enthalten ist. Für eine solche Teilmenge definieren wir den **Krümmungsdurchmesser** als:

$$\kappa(C) := \sup_{p,q \in C} \inf \{ \kappa(x \circ c) \mid c \text{ ist Geodätische von } p \text{ nach } q \}. \quad (4.14)$$

Weiterhin heiße  $p_l$  **Lotfußpunkt** eines Punktes  $P$  auf  $x(C)$ , wenn  $(P - x(p_l)) \perp T_{p_l} M$ . Betrachte nun das Supremum der Normalschnittkrümmungen

$$\kappa_n^{\text{sup}}(C) := \sup \left\{ \left| \frac{II_p(v, v)}{I_p(v, v)} \right| \mid v \in R^{n-1}, p \in C \right\}.$$

Geodätische seien immer auf Bogenlänge bezogen parametrisiert.

**Lemma 4.1** *Ist  $c$  eine Geodätische, dann gilt für die Krümmungsfunktion  $\kappa$  von  $x \circ c$ :*

$$\kappa \leq \kappa_n^{\text{sup}}(C)$$

**Beweis:**

$$\kappa = |II_c(c', c')| \leq \kappa_n^{\text{sup}}(C).$$

□

**Satz 4.2** *Gibt es ein  $P \in \mathbf{R}^n$  mit zwei Lotfußpunkten  $p_0$  und  $p_1$ , so dass*

$$\|P - x(p_0)\| \kappa_n^{\text{sup}}(C) < 1, \quad (4.15)$$

*dann ist  $\kappa(C) \geq \frac{\pi}{2}$ .*

**Beweis:** Wegen der Konvexität gibt es eine Geodätische  $c : [0, l] \rightarrow C$  von  $p_0$  nach  $p_1$ . Sei  $\kappa$  die Krümmungsfunktion von  $x \circ c$ . Dann ist wegen Lemma 4.1  $\kappa(t) < \kappa_n^{\text{sup}}(C)$ , und zusammen mit der Voraussetzung (4.15) gilt  $\|P - x(c(0))\| \max_{t \in [0, l]} \kappa(t) < 1$ . Damit und mit der Lotfußpunkteigenschaft von  $p_0$  und  $p_1$  sind für  $x \circ c$  und  $P$  die Voraussetzungen von Satz 2.5 erfüllt. Es ist also  $\kappa(x \circ c) \geq \frac{\pi}{2}$ , woraus  $\kappa(C) \geq \frac{\pi}{2}$  unmittelbar folgt. □

**Satz 4.3** *Sei  $\kappa(C) < \pi$  und ein  $R > 0$  gegeben mit*

$$R \cdot \kappa_n^{\text{sup}}(C) < 1. \quad (4.16)$$

*Dann haben  $C$  und jede sie berührende Kugel mit Radius  $R$  nur den einen Punkt gemein.*

**Beweis:** Der Mittelpunkt der betrachteten Kugel soll  $P$  heißen. Sei der Berührungspunkt mit  $P_0 = x(p_0)$  gegeben, wobei  $p_0$  als ein Lotfußpunkt von  $P$  auf  $C$  gewählt ist. Die Berühreigenschaft bedeutet gerade, dass dies möglich ist. Dann nehmen wir das Gegenteil der Aussage an und bezeichnen den zweiten Punkt, den die Kugel mit  $C$  gemeinsam hat, als  $P_1 = x(p_1)$ . Wegen der Konvexität gibt es eine Geodätische  $c$  von  $p_0$  nach  $p_1$ . Sei  $\kappa$  die Krümmungsfunktion von  $x \circ c$ . Dann ist wegen Lemma 4.1  $\kappa < \kappa_n^{\text{sup}}(C)$ , und zusammen mit der Voraussetzung (4.16) gilt  $R \cdot \max_{t \in [0, l]} (\kappa(t)) < 1$ . Also sind die Voraussetzungen von Satz 3.2 für  $x \circ c$  und  $P$  erfüllt, so dass  $\kappa(\gamma) \geq \pi$  ist und  $\kappa(C) \geq \pi$  unmittelbar folgt. Dies ergibt einen Widerspruch zu den Voraussetzungen, weswegen das angenommene  $P_1$  nicht existieren kann. □

**Bemerkung 4.4** *Lässt man in den Voraussetzungen (4.15) und (4.16) die Gleichheit zu, ist die Aussage nicht mehr richtig. Das wird deutlich, wenn als Fläche eine beliebig kleine Kugelkappe und der Mittelpunkt als Projektionsfußpunkt in Satz 4.2 oder als Kugelmittelpunkt in Satz 4.3 genommen wird.*

*Die Konvexität kann auch nicht fallen gelassen werden, was sich an einer Schraubenfläche verdeutlichen lässt (siehe Abbildung 4). Die Fläche ist beliebig flach, so dass die Aussagen der obigen Sätze für sie nicht richtig sind. Da die Hauptkrümmungen beliebig klein sind, ist als einziges die Konvexität nicht erfüllt.*

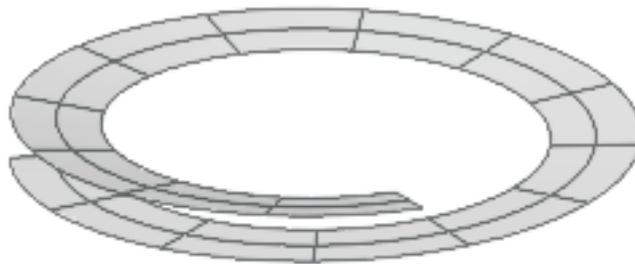


Abbildung 4: Schraubenfläche

## Danksagung

Ich danke Herrn Dr.Kohlmann, Herrn Prof. Walter und Herrn Prof. Stöckler für die zahlreichen Diskussionen und hilfreichen Ratschläge und Herren Dr. Skoruppa für die Korrekturen.

## Literatur

- [1] Milnor, J.W. (1950), On the total curvature of knots, Annals of Mathematics 2, 249-257

- [2] Alexandrov, A.D. und Reshetnyak, Yu.G. (1989), General Theory of Irregular curves. Transl. from Russian by L.YaYuziha, Mathematics and Its Applications: Soviet Series, 29 Kluver Academic Publishers.