Lokalisierung bei zufällig gestörten periodischen Schrödingeroperatoren in Dimension Eins

Diplomarbeit
von
Ivan Veselić

angefertigt

am Mathematischen Institut
der Ruhr-Universität-Bochum

1996

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

,, Zufällige Operatoren "

Was hat man sich unter einem zufälligem Operator vorzustellen? Genaugenommen betrachten wir nicht einen selbstadjungierten Operator H, sondern eine ganze Familie von solchen:

$$H^\omega \ \text{ auf } \ L^2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

parametrisiert mit ω aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Natürlich hängt das Spektrum $\sigma(H^\omega)$ auch von ω ab. Für bestimmte Typen von Schrödingeroperatoren hat man jedoch die Unabhängigkeit der Spektraleigenschaften von dem ,,Zufall ω" nachgewiesen.

Sei $\{T_i\}_{i\in I}$ eine Familie von maßerhaltenden Transformationen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von unitären Operatoren auf einem separablen Hilbertraum. Falls für eine Familie $\{H^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ von meßbaren, selbstadjungierten Schrödingeroperatoren gilt:

$$H^{T_i\omega} = U_i H^\omega U_i^* \tag{2}$$

nennt man sie ergodisch. Erfüllt der zufällige Schrödingeroperator H^ω diese Eigenschaft, dann existiert eine Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ von vollem Maß und eine Teilmenge Σ der reellen Zahlen, so daß gilt

$$\Sigma = \sigma(H^\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \tag{3}$$

Entsprechende Aussagen gelten für das absolutstetige und singulärstetige Spektrum sowie für das reine Punktspektrum (vgl. [25, 23, 18]). Daher macht es überhaupt Sinn von dem Spektrum einer zufälligen Operatorfamilie zu sprechen. Näheres zu den Begriffen der Ergodizität und Meßbarkeit von Operatoren kann man in [16] und [6] finden. Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit $\mathbb{Z}$-ergodische Operatoren ($I = \mathbb{Z}$), aber diese Eigenschaft (d.h. Gleichung 2) spielt für die Beweise keine Rolle.

Physikalischer Hintergrund der Lokalisierungstheorie

Ein Elektron im kristallinen Leiter spührt ein periodisches Potential, falls man die Wechselwirkung mit anderen Elektronen vernachläßigt. Dies entspricht dem Idealfall ohne Unreinheiten im Kristall. Sind diese vorhanden, kann man sie durch ein zufälliges Störpotential beschreiben. Es stellt sich die Frage, wie sich das Spektrum des rein periodischen Operators von demjenigen mit einer kleinen Störung unterscheidet. Im ersten Fall existiert nur absolutstetiges Spektrum, das in Bändern angeordnet ist. Dazwischen befinden sich Lücken, die der Resolventenmenge angehören. Im Fall mit einer kleinen zufälligen Störung bleibt die Bänderstruktur erhalten, aber an den Rändern der Bänder tauchen kleine Intervalle mit reinem Punktspektrum auf. Dies deutet auf eine schlechtere Leitfähigkeit als beim reinen Kristall hin.

In dieser Arbeit untersuchen wir das Phänomen der Lokalisierung in einem Energieintervall I. So nennt man die Eigenschaft, daß

$$\sigma(H^\omega) \cap I \subset \sigma_{pp}(H^\omega) \tag{4}$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt. Schon Ende der Fünfziger Jahre hat Anderson in einem Artikel [3] diese Tatsache für das diskrete Analogon eines zufälligen Schrödingeroperators erklärt. Falls zusätzlich die Eigenfunktionen zu Eigenwerten aus dem Intervall I exponentiell abfallen, spricht man von exponentieller Lokalisierung.

Multiskalen-Analyse

Das Kernstück dieser Arbeit bildet die sogenannte Multiskalen-Analyse. Ursprünglich entstammt diese Methode der Perkolationstheorie. Zum ersten mal wurde sie in dem Artikel [11] verwendet, um eine abgeschwächte Form der Lokalisierung zu zeigen. Wie bei der erwähnten Arbeit von Anderson war der betrachtete Operator das diskretisierte Pendant des Schrödingeroperators. Die Multiskalen-Analyse ist ein Induktionsargument, das auf einer Kombination von geometrischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Ideen beruht (vgl. Kapitel 4). Ihr Ergebnis haben wir in Theorem 3.3 bzw. Satz 3.5 formuliert. Um die Induktion durchzuführen, ist die sogenannte Wegner-Abschätzung ([29]) im Energieintervall I vonnöten (vgl. Kapitel 7). Wir bezeichnen sie mit (H2). Grob formuliert besagt (H2), daß sich in dem kleinen Intervall I Eigenwerte eines restringierten Schrödingeroperators $H^\omega|_\Lambda$ nur mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit befinden. Dabei ist Λ ein Quadrat im Konfigurationsraum.

Um die Multiskalen-Analyse zu starten, braucht man noch die Induktionsvoraussetzung (H1). Sie besagt, daß für eine Anfangsgröße Λ_0 die Greensche

Funktion von $H^\omega|_{\Lambda_0}$ mit großer Wahrscheinlichkeit exponentiell abfällt. Mit den beiden Annahmen (H1) und (H2) ist es uns möglich, für eine wachsende Folge von Quadraten $\{\Lambda_k\}$ $k \in \mathbb{N}$ das Analogon von (H1) zu zeigen. Was man unter ‚klein' und ‚groß' versteht, hängt dabei immer von der Größe des betrachteten Quadrats Λ ab. Nachdem der exponentielle Abfall der Greenschen Funktion auf allen Skalen mit guter Wahrscheinlichkeit nachgewiesen ist, folgt dieselbe Eigenschaft für Eigenfunktionen ψ von H^ω zu Eigenwerten aus I (Kapitel 5).

Bisherige Resultate

Schon vor dem erwähnten Artikel von Fröhlich und Spencer [11] gab es Beweise der Lokalisierung, z.B. [13]. Die Methode von [11] hat aber den Vorteil, daß sie für einen beliebig-dimensionalen Konfigurationsraum $\mathbb{R}^d$ anwendbar ist. Allerdings ist im mehrdimensionalen Fall $d > 1$ die Induktionsvoraussetzung (H1) schwierig nachzuweisen (vgl. [21], [4]). Im Laufe der Zeit wurde die Methode von Fröhlich und Spencer vereinfacht ([9]) und für den kontinuierlichen Schrödingeroperator umformuliert ([14], [7]) .

Lifschitz Tails

Eine Möglichkeit, sich die Induktionsvoraussetzung (H1) zu beschaffen, bieten die sogenannten Lifschitz-Tails (vgl. [16], [24]). So bezeichnet man die Ausdünnung der Integrierten Zustandsdichte $N(E)$ am Rand des Spektrums von H^ω (vgl. Kapitel 6). Dieses Phänomen hat man bisher bei dem Infimum des Spektrums von halbbeschränkten Operatoren in beliebiger Dimension nachgewiesen [21, 7].

In dieser Arbeit zeigen wir Lokalisierung bei den Rändern der Spektralbänder eines zufällig gestörten, eindimensionalen, periodischen Schrödingeroperators (Theorem 3.7). Die Induktionsannahme (H1) liefern uns die Lifschitz-Tails an diesen Rändern, wie sie Mezincescu ([24]) nachgewiesen hat. Verheißungsvoll wäre es, seine Resultate in dem höherdimensionalen Fall zu zeigen. Dann könnte man in dieser allgemeineren Situation einen Lokalisierungsbeweis analog zu der vorliegenden Arbeit führen.

Im Gegensatz zu dem Artikel [21] von Klopp sind die Ergebnisse dieser Arbeit nicht auf das erste Spektralband beschränkt. Die Arbeit [7] von Barbaroux, Combes und Hislop beinhaltet unser Resultat auch nicht, weil dort die Induktionsvoraussetzung (H1) durch eine spezielle zusätzliche Forderung an das zufällige Potential gewährleistet wird.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um Prof. Dr. W. Kirsch für die Themenstellung und Betreuung der Arbeit zu danken. Ebenso gilt mein Dank den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Mathematische Physik an der Universität Bochum für manche nützliche Erklärung. Herrn P.D. Dr. Ghaanat bin ich für einen äußerst hilfreichen Literaturhinweis zu Dank verpflichtet. Schließlich bedanke ich mich bei meinem Vater Prof. Dr. K. Veselić , der sich Zeit für zahlreiche Diskussionen über diese Arbeit genommen hat, ebenso wie bei meiner Mutter Dj. Veselić für das Korrekturlesen.

2 Modell und Notation

Wir beschreiben nun den betrachteten Schrödingeroperator H^ω auf $L^2(\mathbb{R})$.

$$H^\omega := H_0 + \sum_{i\in\mathbb{Z}} t(\omega, i)\chi(\cdot - i)$$

Sei V_0 ein stetiges, beschränkters Potential und

$$H_0 := -\Delta + V_0$$

eine von unten beschränkte, selbstadjungierte Störung von $-\Delta$. Der Operator H^ω hängt von einem zufälligem Parameter ω aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ab. Die Zufallsvariablen

$$t(\cdot, i) \; : \; \Omega \; \rightarrow \; \mathbb{R} \quad i \in \mathbb{Z}$$

sind unabhängig und identisch verteilt. D.h. ihre Bildmaße

$$\mu_i := \mathbb{P}(t(\cdot, i)^{-1}) \quad i \in \mathbb{Z}$$

stimmen überein. Daher schreiben wir μ statt μ_i. Dieses Maß habe eine beschränkte Dichte g bezüglich des Lebesguemaßes mit kompaktem Träger. Die Funktion $\chi(\cdot - i)$ nennen wir Einzelplatzpotential bei i. Es gelte:

$$\chi \in C_0(B_r(0), \mathbb{R})$$

für ein positives r. Dies bedeutet, daß der Träger der stetigen, reellen Funktion χ im Ball vom Radius r um den Nullpunkt enthalten ist. Insbesondere ist

$$V^\omega(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} t(\omega, i)\chi(x - i) \tag{5}$$

eine beschränkte, stetige Funktion, also eine infinitesimal kleine Störung des Operators H_0. Daher ist H^ω selbstadjungiert auf dem Definitionsbereich $D(H_0) = D(-\Delta)$ von H_0.

Wir bezeichnen mit

$$\Lambda_L(x) := [x - L/2, x + L/2]$$

das Intervall der Länge L mit Mittelpunkt x. $\partial\Lambda_L(x) = \{x - L/2, x + L/2\}$ bezeichnet den Rand im üblichen Sinne. Dagegen ist

$$\delta\Lambda_L(x) := \{x' \in \Lambda_L(x) | \; d(x', \partial\Lambda_L(x)) \leq 1\}$$

ein verallgemeinerter Rand von der Breite 1. Für zwei Punkte $y, z \in \Lambda_L(x)$ schreiben wir

$$(y, z) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta \ ,$$

falls mindestens einer der beiden Punkte nicht in $\delta\Lambda_L(x)$ liegt.

In der Multiskalen-Analyse bedient man sich der restringierten Operatoren

$$H^\omega_{\Lambda_L(x)} \text{ auf } L^2(\Lambda_L(x))$$

Der Operator $H^\omega_{\Lambda_L(x)}$ ist die Einschränkung von H^ω auf das Intervall $\Lambda_L(x)$ mit Dirichlet-Bedingungen am Rand (vgl. [26]). Er hängt wegen der Form des Potentials V^ω nur von den Zufallsvariablen $t(\cdot, i)$ mit Index $i \in \Lambda_{L+2r}(x)$ ab. Falls es auf die Lage und Größe des Intervalls nicht ankommt, kürzen wir $\Lambda_L(x)$ mit Λ ab.

In Kapitel 6 spielen die Lifschitz Tails der Integrierten Zustandsdichte $N(E)$ eine zentrale Rolle. Diese Größe „zählt die Anzahl der Zustände unterhalb der Energie E pro Volumeneinheit". Natürlich macht diese Beschreibung wegen des kontinuierlichen Spektrums keinen Sinn für einen Schrödingeroperator H^ω auf $L^2(\mathbb{R})$. Dagegen ist für die restringierten Operatoren $H^\omega|_\Lambda$ die Integrierte Zustandsdichte wohldefiniert - zumindest unter den Voraussetzungen, die wir an das Potential $V := V_0 + V^\omega$ gestellt haben:

$$N^\omega_\Lambda(E) := \#\{\text{ Eigenwert von } H^\omega|_\Lambda < E\} \tag{6}$$

Für monoton wachsende Intervalle Λ ist der Limes

$$\lim_{|\Lambda| \to \mathbb{R}} \frac{N^\omega_\Lambda(E)}{|\Lambda|} = N(E) \tag{7}$$

wohldefiniert und unabhängig von ω (vgl. [19], [6]). Sei $E \in \mathbb{R}$ ein Punkt in der Resolventenmenge $\rho(H^\omega_\Lambda)$ des Operators H^ω_Λ. Dann existiert die Resolvente

$$R^\omega_\Lambda(E) \ : \ L^2(\Lambda) \ \to \ L^2(\Lambda)$$

Dies ist ein beschränkter Operator, dessen Bildbereich gleich dem Definitionsbereich $D(H^\omega_\Lambda)$ von H^ω_Λ ist. Da unser Potential V stetig ist, handelt es sich bei der Resolvente um einen Integraloperator (vgl. [6], [1]). Wie üblich bezeichnen wir den Integralkern der Resolvente mit

$$G^{\omega}_{\Lambda}(\cdot,\cdot,E)$$

und nennen ihn Greensche Funktion. Diese ist stetig auf $\Lambda \times \Lambda$ und ihre Ableitung

$$D_1 G^{\omega}_{\Lambda}(\cdot,\cdot,E) \text{ oder } D_2 G^{\omega}_{\Lambda}(\cdot,\cdot,E)$$

ist es auf $\Lambda \times \Lambda \setminus \{(x,y)|x = y\}$ (vgl. [6], [1]).

Um Schreibarbeit zu sparen, kürzen wir $G^{\omega}_{\Lambda_L(x)}(\cdot,\cdot,E)$ mit $G_L(\cdot,\cdot,E)$, $R^{\omega}_{\Lambda_L(x)}(E)$ mit R_L oder R, $H^{\omega}_{\Lambda_L(x)}$ mit H_L und $H^{\omega}_{\Lambda_{L_k}(x)}$ mit H_k ab, falls $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ein Folge von Intervallängen ist. Dies geschieht nur dann, wenn schon aus dem Kontext hervorgeht, was genau gemeint ist.

Die bisher gemachten Voraussetzungen reichen aus, um die Multiskalen-Analyse in Kapitel 4 durchzuführen. Damit wir sie überhaupt starten und somit auf Lokalisierung schließen können, müssen wir nachweisen, daß die beiden Hypothesen (H1) und (H2) von Theorem 3.3 für alle Intervallängen $L_0 \geq Q$ gelten. Dabei ist $Q \in \mathbb{R}_+$ eine beliebige endliche Zahl.

(H1) Es existiert ein $\tau \in]-1/2, 1/2]$ mit

$$\mathbb{P}(\{\omega|\ \Lambda_{L_0}(\tau) \text{ ist } (m_0,E)\text{-regulär } \forall E \in I\}) \geq 1 - L_0^{-p}$$

(H2) $\mathbb{P}(\{\omega|\ d(E,\sigma(H_{\Lambda_L(x)})) < \exp(-L^b)\}) \leq L^{-q}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall L \geq L_0,\ \forall E \text{ mit } d(E,I) \leq 1/2\exp(-L^b)$$

Dabei heißt $\Lambda_L(x)$ (m,E)-regulär, falls gilt

$$E \in \rho(H_{\Lambda_L(x)})$$

und

$$\sup_{y\in\delta\Lambda_L(x), z\in\Lambda_1(x)} |G_{\Lambda_L(x)}(y,z,E)| \leq \exp(-mL/2)$$

Um in Kapitel 7 die Wegner-Abschätzung (H2) zu zeigen, brauchen wir noch die Annahme, daß eine offene Teilmenge U von $\Lambda_1(0)$ existiert, auf welcher für das Einzelplatzpotential $\chi(\cdot) \geq \alpha > 0$ gilt.

Ebenso erfordert der Nachweis der Induktionsvoraussetzung (H1) in Kapitel 6 weitere Annahmen. Wir spezialisieren uns deshalb auf einen Schrödingeroperator

$$H_0 = -\Delta + V_0$$

mit $\mathbb{Z}$-periodischem Potential V_0. Diesem wird dann das zufällige Störpotential V^ω hinzugefügt. Das Spektrum von H_0 besteht aus Bändern

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [E_{n,-}, E_{n,+}]$$

Es gilt $E_{n,-} \leq E_{n,+}$ und unter vernünftigen Voraussetzungen auch $E_{n,+} < E_{n+1,-}$, so daß sich zwischen den Bändern des Spektrums Lücken befinden, die der Resolventenmenge angehören. Für Details siehe [26]. Wir machen nun Voraussetzungen, die uns ermöglichen, die Induktionsvorassetzung (H1) in der Nähe der Energien $\{E_{n,-}, E_{n,+}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nachzuweisen:

(H3) Die Dichte g des Maßes μ habe den Träger $[0, 1]$ und es gelte:

$$\mu([0, x[) = \mathcal{O}(x^{\delta_-})$$
$$\mu(]1 - x, 1]) = \mathcal{O}(x^{\delta_+})$$

für gewisse $\delta_-, \delta_+ \geq 0$.

In [4] wird für diese Exponenten $\delta_-, \delta_+ > 3d/2$ verlangt, um (H1) nachzuweisen, wobei d die Dimension des Konfigurationsraumes ist. Daher ist z.B. die uniforme Verteilung der zufälligen Kopplungskonstanten $t(\cdot, i)$ ausgeschlossen. Unser Theorem 3.7 ist aber auch in diesem Fall anwendbar.

Wir betrachten eine Spektrallücke $]E'_-, E'_+[\, = \,]E_{n,+}, E_{n+1,-}[$ des ungestörten Operators H_0 und versehen den Störterm mit einer Kopplungskonstante κ:

$$H^\omega = H_0 + \kappa V^\omega$$

Da V^ω ein beschränkter Operator ist, ist es möglich $\kappa > 0$ so klein zu wählen, daß die Lücke im Spektrum des gestörten Operators H^ω nicht verschwindet. Es gibt also ein Intervall $]E''_-, E''_+[\, \subset \,]E'_-, E'_+[$ mit

$$]E''_-, E''_+[\, \cap\, \sigma(H_0 + \kappa V^\omega) = \emptyset$$

Die Bedingung in (H3) an den Träger von g erscheint im ersten Moment restriktiver als sie ist. Man kann nämlich den Vorfaktor κ ändern oder einen

Teil des zufälligen Potentials dem periodischen zuschlagen, falls der Träger von g größer ist als $[0, 1]$.

Wir verwenden folgende Abkürzung für die größte gerade Zahl kleiner als x:

$$[x]_2 := \sup\{n \in 2\mathbb{N} |\ n < x\} \tag{8}$$

Noch eine Bemerkung zum leichteren Lesen dieser Arbeit: für komplizierte Begriffe und Voraussetzungen werden Abkürzungen verwendet, z.B. (ii), (III) oder $\mathrm{R}(m, L)$. Die jeweilige Definition bzw. Notationsvereinbarung steht unmittelbar vor dem Satz, in dem der Begriff benötigt wird.

3 Resultate

Definition 3.1

Seien $m > 0,\ K > 0,\ E \in R$ und ein Schrödingeroperator $H_{\Lambda_L(x)}$ gegeben.
a) Das Intervall $\Lambda_L(x)$ heißt (m, E)-regulär, falls gilt

$$E \in \rho(H_{\Lambda_L(x)})$$

und

$$\sup_{y \in \delta\Lambda_L(x), z \in \Lambda_1(x)} |G_{\Lambda_L(x)}(y, z, E)| \leq \exp(-mL/2)$$

b) $\Lambda_L(x)$ heißt (m, E, C)-regulär bezüglich der Ableitung, falls gilt

$$E \in \rho(H_{\Lambda_L(x)})$$

und

$$\sup_{y \in \delta\Lambda_L(x), z \in \Lambda_1(x)} |D_1 G_{\Lambda_L(x)}(y, z, E)| \leq C \exp(-mL/2)$$

D_1 bezeichnet hier die Ableitung nach der Variablen y.
c) $\Lambda_L(x)$ heißt (E, K)-nicht resonant, falls gilt

$$E \in \rho(H_{\Lambda_L(x)})$$

und

$$\sup_{(y,z) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta} |G_{\Lambda_L(x)}(y, z, E)| \leq 2K \exp(L^b)$$

d) $\Lambda_L(x)$ heißt (E, K)-nicht resonant bezüglich der Ableitung, falls gilt

$$E \in \rho(H_{\Lambda_L(x)})$$

und

$$\sup_{(y,z) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta} |D_1 G_{\Lambda_L(x)}(y, z, E)| \leq 2K \exp(L^b)$$

Wie gesagt, bedeutet $(y, z) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta$, daß beide Punkte in $\Lambda_L(x)$ liegen, aber mindestens einer von ihnen Mindestabstand 1 vom Rand von $\Lambda_L(x)$ hat.

Definition 3.2
Eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ fällt exponentiell ab (im Unendlichen) mit Masse m, falls gilt:

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{\log|\psi(x)|}{|x|} \leq -m \tag{9}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$$

so, daß

$$|\psi(x)| \leq \exp(-(m-\epsilon)|x|) \quad \forall x \text{ mit } |x| \geq N(\epsilon)$$

Theorem 3.3
Seien $I \subset \mathbb{R}$, $p > 1$, $m_0 > 0$, $b \in]0,1[$, $q > 4p+6$ gegeben. Dann existiert ein $Q_0 = Q_0(p, b, q, m_0, I, ||V||_\infty)$, so daß für $L_0 \geq Q_0$ aus:

(H1) *Es existiert ein $\tau \in]-1/2, 1/2]$ mit*

$$\mathbb{P}(\{\omega |\ \Lambda_{L_0}(\tau) \textit{ ist } (m_0, E)\textit{-regulär } \forall E \in I\}) \geq 1 - L_0^{-p}$$

(H2) $\mathbb{P}(\{\omega |\ d(E, \sigma(H_{\Lambda_L(x)})) < \exp(-L^b)\}) \leq L^{-q}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall L \geq L_0,\ \forall E \textit{ mit } d(E, I) \leq 1/2 \exp(-L^b)$$

folgt:

Mit Wahrscheinlichkeit Eins hat der Operator $H = H^\omega$ im Energieintervall I reines Punktspektrum. Die Eigenfunktionen zu Eigenwerten aus I fallen exponentiell ab mit Masse $m := 1/4\, m_0$.

Der Beweis setzt sich aus den beiden folgenden Sätzen zusammen.

Definition 3.4
Sei ein Gitter $\mathbb{Z} + \tau$ vorgegeben. Mit $R(L,m)$ bezeichnen wir die Aussage:

$$\mathbb{P}\{\omega |\ \forall E \in I \textit{ ist } \Lambda_L(x) \textit{ oder } \Lambda_L(y)\ (m, E)\textit{-regulär } \} \geq 1 - L^{-2p}$$
$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z} + \tau \textit{ mit } |x - y| > L + 2r$$

Satz 3.5

Seien $I \subset \mathbb{R}$, $p > 1$, $m_0 > 0$, $b \in]0,1[$, $q > 4p + 6$ gegeben. Sei $m_\infty := 1/2m_0$. Dann existieren ein $a = a(p) \in]1,2[$ und ein $Q_1 = Q_1(p, b, q, m_0, I, ||V||_\infty)$, so daß für $L_0 \geq Q_1$ aus:

$$\text{(H2) } \textit{und } R(\ L_0, m_0) \textit{ sind wahr}$$

folgt:

$$R(L_k, m_\infty) \textit{ ist wahr}$$

für alle Skalen in der Folge $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $L_{k+1} := [L_k^a]_2$.

Der Satz wird in Kapitel 4 bewiesen.

Satz 3.6

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien $p > 1$, $q > 4p + 6$, $L_0 > 1$, $a < 2p$, $m_\infty > 0$ vorgegeben. Die Folge $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch $L_{k+1} := [L_k^a]_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Es gelte:

$$R(L_k, m_\infty) \textit{ ist wahr für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann hat der Schrödingeroperator H^ω mit Wahrscheinlichkeit Eins reines Punktspektrum im Energieintervall I. Eigenfunktionen zu Eigenwerten aus I fallen exponentiell ab im Unendlichen mit Masse $m := 1/2\, m_\infty$.

Der Satz wird im Kapitel 5 bewiesen.

Wir führen ein konkretes Beispiel an, welches die Voraussetzungen von Theorem 3.3 erfüllt. Sei V^ω ein zufälliges Potential wie in Kapitel 2 beschrieben, für das die Voraussetzung (H3) gilt. Zusätzlich nehmen wir $r = 1/2$ an, d.h. für das Einzelplatzpotential χ gilt $\chi \in C(B_{1/2}(0))$. H_0 sei ein Schrödingeroperator mit $\mathbb{Z}$-periodischem Potential. Sei

$$]E'_-, E'_+[\ \subset \ \rho(H_0)$$

eine Spektrallücke. Bei dem zufällig gestörten Operator sei die Kopplungskonstante κ so gewählt, daß die Spektrallücke nicht ganz verschwindet. Die Beschränktheit des Potentials V^ω gewährleistet, daß eine solche Wahl von κ möglich ist. Sei $]E_-, E_+[$ das größte Intervall, welches

$$]E_-, E_+[\ \subset \ ]E'_-, E'_+[\ \cap \ \rho(H^\omega)$$

erfüllt.

Theorem 3.7
Unter den vorangegangenen Voraussetzungen existieren $\epsilon_-, \epsilon_+ > 0$*, so daß der zufällig gestörte Operator* H^ω *in den Intervallen* $]E_-, E_- + \epsilon_-[$ *und* $]E_+ - \epsilon_+, E_+[$ *reines Punktspektrum besitzt.*

4 Multiskalen-Analyse

Die Ergebnisse in diesem Kapitel sind eine Umformulierung des Artikels [9] von von Dreifus und Klein für den eindimensionalen Schrödingeroperator. Die Resultate in [9] beziehen sich auf das diskrete Analogon dieses Operators und gelten in beliebiger Dimension. Vergleiche auch den Artikel [7] von Combes und Hislop, welche auch die Multiskalen-Analyse im kontinuierlichen Fall beweisen. Allerdings verwenden sie eine andere Variante dieses Induktionsbeweises.

4.1 Geometrischer Teil des Induktionsschrittes

Zuerst beweisen wir einige technische Lemmata.

Lemma 4.1
Sei $G_y(x) := G(x, y, E)$ die Greensche Funktion von H_{Λ_L} bei einer festen Energie $E \in \rho(H_{\Lambda_L})$, d.h. $G_y(x)$ sei der Integralkern der Resolvente $(H_{\Lambda_L} - E)^{-1}$. Sei $u \in C^2(\Lambda_L)$. Dann gilt :

$$u(y) = \int_{\Lambda_L} G_y\,(-\Delta + V - E)u\,dx \;+ [uG'_y - G_y u']_{-L/2}^{+L/2} \tag{10}$$

für alle $y \in \overset{\circ}{\Lambda}_L$.

Dies ist eine verallgemeinerte Greensche Representationsformel. Sie wird uns auch in Kapitel 5 nützlich sein. Einfachheitshalber wurde hier nur $\Lambda_L := \Lambda_L(0)$ betrachtet.

Beweis
Seien $u, w \in C^2(\Lambda_L)$. Partielle Integration liefert :

$$\begin{aligned} [wu' - uw']_{-L/2}^{+L/2} &= \int_{\Lambda_L} (wu'' - uw'')\,dx \\ &= -\int_{\Lambda_L} [w(-u'' + Vu - Eu) - u(-w'' + Vw - Ew)]\,dx \end{aligned}$$

Wir haben nur $w(x)\,(V(x) - E)\,u(x)$ addiert und subtrahiert in der letzten Zeile. Für die Greensche Funktion $G_y = G(\cdot, y, E)$ gilt :

$$(-\Delta + V - E)G_y = 0, \text{ d.h. } -G''_y = (E - V)G_y \text{ auf } \Lambda_L \setminus B_\epsilon(y)\,.$$

Wegen der Stetigkeit von V und G_y gilt demnach sogar $G_y \in C^2(\Lambda_L \setminus B_\epsilon(y))$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & [G_y u' - uG_y']_{-L/2}^{+L/2} - [G_y u' - uG_y']_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \\
= \quad & -\int_{\Lambda_L \setminus B_\epsilon(y)} (G_y(-\Delta + V - E)u - u(-\Delta + V - E)G_y)\, dx \\
= \quad & -\int_{\Lambda_L \setminus B_\epsilon(y)} G_y(-\Delta + V - E)u\, dx \;=\; (*)
\end{aligned}$$

Was geschieht, wenn wir ϵ gegen Null gehen lassen? G_y und u' sind stetig auf Λ_L, daher :

$$[G_y u']_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \to 0 \text{ für } \epsilon \to 0\,.$$

Der Sprung von G_y' bei y ist auf 1 normiert, denn

$$\begin{aligned}
& (-\Delta + V - E)G_y = \delta_y \\
\Rightarrow \quad & -G_y'(x) + \textstyle\int_{-L/2}^{x}(V(\tau) - E)G_y(\tau)\, d\tau = \mathbf{1}_{[y,L/2[}(x) + const. \\
\Rightarrow \quad & G_y'(x) = \textstyle\int_{-L/2}^{x}(V - E)G_y(\tau)\, d\tau - const. - \mathbf{1}_{[y,L/2[}(x)
\end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist stetig in Λ_L, der letzte hat einen Sprung vom Betrag Eins bei $x = y$.

$$\Rightarrow \; G_y'(y+) - G_y'(y-) = -1$$

Mit der Stetigkeit von u in Λ_L folgt :

$$\begin{aligned}
-[-uG_y']_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \;&=\; u(y+\epsilon)G_y'(y+\epsilon) - u(y-\epsilon)G_y'(y-\epsilon) \\
&\to\; u(y)(G_y'(y+) - G_y'(y-)) \;\text{ für } \epsilon \to 0 \\
&=\; -u(y)
\end{aligned}$$

Das Integral $(*)$ hängt stetig von seinen Grenzen ab, da der Integrand eine integrierbare Funktion ist.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & [G_y u' - uG_y']_{-L/2}^{+L/2} - u(y) = -\textstyle\int_{\Lambda_L} G_y\,(-\Delta + V - E)u\, dx \\
\Rightarrow \quad & u(y) = \textstyle\int_{\Lambda_L} G_y\,(-\Delta + V - E)u\, dx + [G_y u' - uG_y']_{-L/2}^{+L/2} \;\text{ für alle } y \in \mathring{\Lambda}_L
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 4.2

Seien $L > l > 0$ und $x, y \in \Lambda_L$ mit $|x-y| > l/2$ und $\Lambda_l(y) \subset \Lambda_L$. Dann gilt für ein beliebiges $y' \in \Lambda_l(y)$:

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_L}(x, y', E) &= -G_{\Lambda_L}(x, y - l/2, E) D_1 G_{\Lambda_l(y)}(y - l/2, y', E) \\ &\quad + G_{\Lambda_L}(x, y + l/2, E) D_1 G_{\Lambda_l(y)}(y + l/2, y', E) \end{aligned}$$

Wir ‚entwickeln' sozusagen die Greensche Funktion vom großen Intervall Λ_L nach der vom kleinen Λ_l. Eine ähnliche Formel wurde schon in [20] verwendet.

Beweis

$G_L(x, \cdot) := G_{\Lambda_L}(x, \cdot, E)$ ist 2 mal stetig differenzierbar in $\Lambda_l(y)$, weil x außerhalb dieses Intervalls liegt. Demnach kann man die Formel (10) aus dem vorhergehenden Lemma verwenden:

$$\begin{aligned} G_L(x, y') &= \int_{y-l/2}^{y-l/2} G_l(z, y')(-\Delta + V - E) G_L(x, z)\, dz \\ &\quad + [G_L(x, \cdot) D_1 G_l(\cdot, y') - G_l(\cdot, y') D_2 G_L(x, \cdot)]_{y-l/2}^{y+l/2} \end{aligned}$$

$G_l(\cdot, y') := G_{\Lambda_l(y)}(\cdot, y', E)$ ist die Greensche Funktion von $H_{\Lambda_l(y)}$. Wegen $x \notin \Lambda_l(y)$ gilt $(-\Delta + V - E) G_L(x, z) = 0 \;\; \forall z \in \Lambda_l(y)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \;\; G_L(x, y') = &\; G_L(x, y + l/2) D_1 G_l(y + l/2, y') - G_l(y + l/2, y') D_2 G_L(x, y + l/2) \\ &- G_L(x, y - l/2) D_1 G_l(y - l/2, y') - G_l(y - l/2, y') D_2 G_L(x, y - l/2) \\ = &\; G_L(x, y + l/2) D_1 G_l(y + l/2, y') - G_L(x, y - l/2) D_1 G_l(y - l/2, y') \end{aligned}$$

Zwei Summanden entfallen wegen der Dirichlet-Randbedingung für die Greensche Funktion.

q.e.d.

Lemma 4.3

Sei $g : T \to \mathbb{C}$ für ein Einheitsintervall T eine Lösung der Gleichung

$$(-\Delta + V - E) g = 0\,.$$

Dann gilt für die Ableitung g' folgende Abschätzung auf T :

$$||g'||_\infty \leq C_1 ||g||_\infty \tag{11}$$

mit :

$$C_1 := 2 + |E| + \int_T |V(y)|\, dy\,. \tag{12}$$

Ein Teil des folgenden Beweises ist dem Artikel [14] entnommen.

Beweis

Als Lösung der Differentialgleichung $(-\Delta + V - E)g = 0$ ist $g \in C^2(T)$, da V stetig ist. Anders aufgefaßt löst g das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= (V-E)g \text{ auf } T = [t-1,t] \\ u(t-1) &= g(t-1) \\ u(t) &= g(t) \end{aligned}$$

Die Lösung u können wir als Summe $u = v + w$ schreiben, wobei die Summanden folgende Teilprobleme lösen :

$$\Delta v = (V-E)g \text{ auf } T$$
$$v(t-1) = v(t) = 0$$

bestimmt v. Die Funktion w löst

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \text{ auf } T \\ w(t-1) &= g(t-1) \\ w(t) &= g(t) \end{aligned}$$

Nun schätzen wir die Ableitungen von v und w einzeln ab. Als Lösung der Poisson-Gleichung hat v die Darstellung

$$v(z) = \int_T G_\circ(z,y)(V(y)-E)g(y)\,dy \;\; \forall z \in T$$

Dabei ist $G_\circ(z,y)$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta f = 0$ mit Dirichlet-Randbedingungen $f(t-1) = f(t) = 0$. Deren Ableitung $D_1 G_\circ(\cdot,y)$ hat einen Sprung vom Betrag 1 bei y, weil die δ-Distribution auf Eins normiert ist. Auf den Teilintervallen $[t-1,y]$ und $[y,t]$ ist $D_1 G_\circ(\cdot,y)$ konstant. Wegen $G_\circ(\cdot,y) = 0$ auf ∂T und der Stetigkeit von $G_\circ(\cdot,y)$ im Punkt y muß $D_1 G_\circ(\cdot,y)$ in y das Vorzeichen wechseln. Daraus folgert man :

$$||D_1 G_\circ(\cdot,y)||_\infty \leq 1 \;\; \forall y \in T$$

und schätzt ab :

$$\begin{aligned} |v'(z)| &\leq \int_T |D_1 G_\circ(z,y)|\, |V(y)-E|\, |g(y)|\,dy \\ &\leq \int_T |V(y)-E|\, |g(y)|\,dy \\ &\leq ||g||_\infty (\int_T |V(y)|\,dy + |E|) \;\; \text{für alle } z \in T \end{aligned}$$

Die Funktion w ist linear und ihre Ableitung daher konstant.

$$w' = \frac{w(t) - w(t-1)}{t - (t-1)} = g(t) - g(t-1)$$

Man folgert :

$$|w'(z)| \leq 2||g||_\infty \text{ für alle } z \in T$$

Insgesamt ergibt sich für die Ableitung von u und damit von g :

$$||u'||_\infty \leq ||v'||_\infty + ||w'||_\infty \leq (2 + |E| + \int_T |V(y)|\, dy)\, ||g||_\infty$$

q.e.d.

Korollar 4.4
Sei $L > 4$.
a) $\Lambda_L(x)$ ist (m, E)-regulär $\Rightarrow$ $\Lambda_L(x)$ ist (m, E, C)-regulär bezüglich der Ableitung.
b) $\Lambda_L(x)$ ist (E, K)-nicht resonant
$\Rightarrow$ $\Lambda_L(x)$ ist (E, KC)-nicht resonant bezüglich der Ableitung, d.h.

$$\sup_{(y,z)\in\Lambda_L(x)\setminus\delta} |D_1 G_{\Lambda_L(x)}(y, x, E)| \leq 2KC \exp(L^b)$$

Die Konstante C ist eine obere Schranke für diejenige in Formel (12).

$$C := 2 + |E| + \sup_{|T|=1} \int_T |V(y)| dy \geq C_1$$

Beweis
Zu a) Wähle $T = [x + L/2 - 1; x + L/2]$ bzw. $T = [x - L/2; x - L/2 + 1]$. Wir setzen $g(y) := G_{\Lambda_L(x)}(y, z, E)$ für ein $z \in \Lambda_1(x)$ und wenden Lemma 4.3 darauf an.

Zu b) Es ist wegen $(y, z) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta$ möglich, ein Einheitsintervall T zu finden, weches y enthält, z aber nicht.
q.e.d.

Definition 4.5
Zwei Intervalle $\Lambda_l(z)$ heißen 2r-disjunkt, falls gilt : $d(\Lambda_l(z), \Lambda_l(z')) \geq 2r$.

Dieser Abstand gewährleistet die Unabhängigkeit der Ereignisse in $\Lambda_l(z)$ von denen in $\Lambda_l(z')$.

Notation 4.6
Sei $L = [l^a]_2$ und J eine ganze Zahl. Für ein Intervall mit Länge L und Mittelpunkt x definieren wir:
(I) :$\Leftrightarrow$ $\Lambda_L(x)$ ist (E, K)-nicht resonant
(II) :$\Leftrightarrow$ $\Lambda_{3jl}(z) \subset \Lambda_L(z)$ ist (E, K)-nicht resonant für alle $z \in Z + x$ und $j = 1, ..., J$
(III) :$\Leftrightarrow$ Es gibt höchstens J (m, E)-singuläre, 2r-disjunkte $\Lambda_l(z) \subset \Lambda_L(x)$ mit
$z \in \mathbb{Z} + x$

Proposition 4.7
Sei $a \in]1, 2[$ und $L = [l^a]_2$. Seien $b \in]0, 1[$, $E \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{N}$, $m \geq 8Jl^{b-1}$. Dann existiert eine Konstante $Q_2(J, a, b, r, K, C) > 1$, so daß für $l \geq Q_2$ aus :

(I), (II), (III) gelten für $\Lambda_L(x)$
folgt :
$\Lambda_L(x)$ ist (M, E)-regulär

mit

$$M \geq m - m(13Jl/L) - 2\log(4CK)\, l^{-1} - 2L^{b-1} \tag{13}$$

$$\geq 8J\, L^{b-1}. \tag{14}$$

Bemerkung 4.8
(1.) Aus (II) und (III) folgen mit Hilfe von Korollar 4.4 die entsprechenden Abschätzungen für die Ableitung der Greenschen Funktion. Sie verschlechtern sich dabei um den Vorfaktor :

$$C = C(E, V) = 2 + |E| + \sup_{|T|=1} \int_T |V(y)| dy < \infty$$

In Lemma 4.14 wird man sehen, wie K von der Energie E und dem Supremum des Potentials $\|V\|_\infty$ abhängt. Man kann also schreiben $Q_2 = Q_2(J, a, b, r, E, \|V\|_\infty)$.

(2.) Nun wollen wir kurz die geometrische Idee des Beweises skizzieren. Falls alle Intervalle der Länge l und mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z} + x$ (m, E)-regulär wären, würde wiederholtes anwenden der Formel aus Lemma 4.2 für $x_0, y \in \Lambda_L(x)$ mit $d(y, \partial\Lambda_L(x)) \leq 1$ und $d(x_0, x) \leq 1$ folgendes liefern :

$$\begin{aligned} |G_L(y, x_0)| &\leq 2C \exp(-ml/2)\ |G_L(y, x_1)| && (15)\\ &\leq [2C \exp(-ml/2)]^{L/l}\ |G_L(y, x_n)| && (16)\\ &\leq const. \exp(-mL/2)\ |G_L(y, x_n)| && (17)\\ &\leq \exp(-ML/2)\ |G_L(y, x_n)| && (18)\end{aligned}$$

Dabei sind x_1 und $x_n \in \mathbb{Z} + x$ Punkte, die man nach dem ersten bzw. n-ten ‚Entwicklungsschritt' erreicht. M ist eine etwas schlechtere, d.h. kleinere, Konstante als m.

Nun gibt es aber auch singuläre Λ_l in $\Lambda_L(x)$. Diese werden so zu größeren Intervallen Λ_{3lj} (j = 1,2,... oder J) zusammengefaßt, daß benachbarte Intervalle Λ_l von Λ_{3lj} regulär sind. Dadurch gewährleisten wir, daß nach jedem ‚schlechten' Entwicklungsschritt ein ‚guter' kommt. Die Abschätzung folgt wie oben, nur daß man die Konstanten modifizieren muß. Für Details siehe den Beweis selbst.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{Z} + \tau$ und $x_0 \in \Lambda_1(x)$. Sei J_1 die maximale Anzahl von (m, E)-singulären, 2r-disjunkten $\Lambda_l(z) \subset \Lambda_L(x)$ mit $z \in \mathbb{Z} + x$. Nach Voraussetzung gilt $J_1 \leq J$. Seien u_i (i = 1,...,J_1) Mittelpunkte von solchen singulären $\Lambda_l(z)$, daß gilt : $\Lambda_l(u_i)$ und $\Lambda_l(u_j)$ sind 2r-disjunkt für i $\neq$ j.

Dann ist nach Voraussetzung jedes zu allen $\Lambda_l(u_i)$ (i = 1,...,J_1) 2r-disjunkte $\Lambda_l(z)$ (m, E)-regulär. Für $l > 4r$ ist jedes $\Lambda_l(z) \subset \Lambda_L(x)$ mit $z \in \mathbb{Z} + x$ und

$$z \notin \bigcup_{i=1,\ldots,J_1} \overset{\circ}{\Lambda}_{2l+4r}\ (u_i) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,J_1} \overset{\circ}{\Lambda}_{3l}\ (u_i)$$

(m, E)-regulär.

Ein Induktionsargument über J_1 liefert die Existenz von J_2 Intervallen $\Lambda_{l_j}(z_i)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $z_i \in \mathbb{Z} + x$, $\forall i = 1, \ldots, J_2 \leq J_1$
   $l_j = 3lj$, $\forall j = 1, \ldots, J_1$

2.
$$\sum_{i=1,\ldots,J_2} l_j \leq 3lJ_1 \leq 3lJ \tag{19}$$
   Dabei ist die Intervallänge $l_j = l_j(z_i)$ eine Funktion von dem Mittelpunkt z_i.

3.
$$\bigcup_{i=1,\ldots,J_2} \mathring{\Lambda}_{l_j}(z_i) \supset \bigcup_{i=1,\ldots,J_1} \mathring{\Lambda}_{3l}(u_i)$$

4. Aus $x \in \partial\Lambda_{l_j}(z_i)$ für ein $i = 1, \ldots, J_2$ folgt
$$x \notin \bigcup_{i=1,\ldots,J_2} \mathring{\Lambda}_{l_j}(z_i) \tag{20}$$

Wir können schließen, daß jedes $\Lambda_l(z) \subset \Lambda_L(x)$ (m, E)-regulär ist, für
$$z \notin \bigcup_{i=1,\ldots,J_2} \mathring{\Lambda}_{l_j}(z_i) \tag{21}$$
und $z \in \mathbb{Z}+x$. Nun verwenden wir die Formel aus Lemma 4.2, um die Greensche Funktion im großen Intervall $\Lambda_L(x)$ nach der Greenschen Funktion im kleineren Intervall $\Lambda_l(x)$ zu entwickeln. Wir verwenden folgende Abkürzungen :
$$\begin{aligned} G_l(y,z) &:= G_{\Lambda_l(x)}(y,z;E) \\ G_L(y,z) &:= G_{\Lambda_L(x)}(y,z;E) \end{aligned}$$
Es gilt für $x_0 \in \Lambda_1(x)$:
$$|G_L(y,x_0)| \leq \sum_{+,-} |G_L(y, x \pm l/2)| \, |D_1 G_l(x \pm l/2, x_0)|$$
Es können zwei Fälle auftreten:
(A) $\Lambda_l(x)$ ist (m, E)-regulär, dann gilt
$$|D_1 G_l(x \pm l/2, x_0)| \leq C \exp(-ml/2),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} |G_L(y,x_0)| &\leq 2 \max_{+,-} |G_L(y, x \pm l/2)| \; C \exp(-ml/2) \\ &= 2C |G_L(y,x_1)| \exp(-ml/2) \; . \end{aligned}$$

Dabei wird dem Punkt $x_1 = x - l/2$ oder $x + l/2$ das Maximum der Greenschen Funktion angenommen.

(B) $\Lambda_l(x)$ ist (m,E)-singulär, dann liegt x in einem $\overset{\circ}{\Lambda}_{l_j}$ (z_i). Nach diesem Intervall entwickeln wir nun die Greensche Funktion :

$$\begin{aligned} |G_L(y,x_0)| &\leq \sum_{x_1' \in \partial\Lambda_{l_j}} |G_L(y,x_1')| \; |D_1 G_{\Lambda_{l_j}}(x_1', x_0)| \\ &\leq 2 |G_L(y, \hat{x}_1)| CK \exp((3lj)^b) \\ &\leq 4 |G_L(y,x_1)| C \exp(-ml/2) CK \exp((3lj)^b) \\ &=: \exp(-m'l/2) |G_L(y,x_1)| \end{aligned} \tag{22}$$

Dabei ist $\hat{x}_1 \in \partial\Lambda_{l_j}$ der Punkt, an dem $max|G_L(y,x_1')|$ angenommen wird. Wir haben (II) verwendet, um den zweiten Faktor in der ersten Zeile (22) abzuschätzen. Wegen der Exklusion (21) wissen wir, daß $\Lambda_l(\hat{x}_1)$ (m,E)-regulär ist. Daher entwickeln wir anschließend nach diesem Intervall und schätzen die Greensche Funktion aufgrund der (m,E)-Regularität ab.

Wir sind nun in beiden Fällen (A) und (B) von x_0 nach x_1 gewandert. Vor dem Betrag der Greenschen Funktion steht ein Faktor den wir F(x_0) nennen. Allgemeiner sei:

$$F(v) := \begin{cases} 2C \exp(-ml/2) & \text{falls für } v \text{ Fall (A) eintritt} \\ \exp(-m'l/2) & \text{falls für } v \text{ Fall (B) eintritt} \end{cases} \tag{23}$$

In abgekürtzter Form lautet jetzt die obige Ungleichung

$$|G_L(y,x_0)| \leq F(x_0) \; |G_L(y,x_1)|. \tag{24}$$

Nun wollen wir noch zeigen, daß für genügend großes l der Exponent $m' \geq 0$ ist. Dann gilt im Fall (B) $F \leq 1$. Die Mindestgröße von l wird abhängig von J, C, K und b gewählt.

$$\begin{aligned} m' &= -2/l \; (\log(4C^2K) + (3lj)^b - ml/2) \\ &= m - 2\log(4C^2K) l^{-1} - 2(3j)^b l^{b-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq m - 6Jl^{b-1}(1 + \frac{\log(4C^2K)}{2J}l^{-b}) \\ &\geq m - 8Jl^{b-1} \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

nach unserer Voraussetzung.

Für x_1 gilt wieder einer der Fälle (A) oder (B), und dies liefert die Formel:

$$|G_L(y, x_1)| \leq F(x_1)|G_L(y, x_2)|$$

wobei x_2 wieder aus $\mathbb{Z} + x$ ist. Solange man nicht an den Rand stößt, kann man diese Prozedur wiederholen und bekommt:

$$|G_L(y, x_0)| \leq F(x_1)F(x_2)...F(x_{n-1})|G_L(y, x_n)|$$

Alle $x_1, .., x_{n-1}$ liegen auf dem Gitter $\mathbb{Z} + x$. Sei n_1 die Anzahl der x_i, für die Fall (A) eintritt, und n_2 die Anzahl der x_i, für die (B) gilt. Mit Ungleichung (25) folgt dann

$$\begin{aligned} |G_L(y, x_0)| &\leq (2C\exp(-ml/2))^{n_1}(\exp(-m'l/2))^{n_2}|G_L(y, x_n)| \quad (26) \\ &\leq (2C\exp(-ml/2))^{n_1}|G_L(y, x_n)| \end{aligned}$$

Falls Fall (B) unendlich oft vorkommt, ist wegen $\exp(-m'l/2) < 1$ der Wert der Greenschen Funktion $G_L(y, x_0) = 0$. Dies kann geschehen, falls $x_i = x_j$ für $i \neq j$, d.h. wenn sich die Intervalle im Entwicklungsprozess periodisch wiederholen. Andernfalls erreicht man nach einer endlichen Schrittzahl $n = n_1 + n_2$ den Rand von $\Lambda_L(x)$. Jetzt wird n_1 von unten abgeschätzt. Jedes n_1, bei dem wir sicher sein können, daß x_n noch Abstand größergleich 1 zum Rand von $\Lambda_L(x)$ hat, ist zulässig. Diese Zulässigkeits-Bedingung gewährleistet, daß die Voraussetzung (I) auf das Paar (y, x_n) anwendbar ist und keines der bisher benutzten Entwicklungsintervalle $\Lambda_l(x), \Lambda_l(x_1), ..., \Lambda_l(x_{n-1})$ den Punkt y enthält. Dieser Mindestabstand 1 gilt für jedes n_1 mit

$$(l/2)n_1 \leq (L/2) - 2 - 3Jl - J(l/2) \tag{27}$$

Dabei benutzen wir Ungleichung (19), um die Gesamtlänge der Entwicklungsschritte, in denen Fall (B) auftritt, abzuschätzen. Das maximale n_1 liegt also im Intervall

$$]\ \frac{2}{l}(L/2 - 2 - (3 + 1/2)Jl) - 1\ ,\ \frac{2}{l}(L/2 - 2 - (3 + 1/2)Jl)\ [$$

Aus der Schranke (26) und Voraussetzung (I) folgt nun:

$$\begin{aligned} |G_L(y,x_0)| &\leq [2C\exp(-ml/2)]^{\frac{2}{l}(L/2-2-4Jl)-1}\,2Ke^{L^b} \\ &=: \exp(-ML/2) \end{aligned}$$

Nun gilt es, M von unten abzuschätzen.

$$\begin{aligned} -M\frac{L}{2} &= [\log(2C)-m\frac{l}{2}]\,[\frac{2}{l}(\frac{L}{2}-2-4Jl)-1]+L^b+\log(2K) \\ \Rightarrow\ M &= m-m(\frac{4}{L}+8J\frac{l}{L}+\frac{l}{L})+\frac{2\log 2C}{L} \\ &\quad -\frac{2}{l}(1-\frac{4}{L}-8J\frac{l}{L})\log(2C)-2L^{b-1}-\frac{2\log 2K}{l} \\ &\geq m-m(13Jl/L)-2\log(4CK)l^{-1}-2L^{b-1} \end{aligned}$$

Damit haben wir Ungleichung (13) gezeigt. Um (14) zu beweisen, müßen wir l genügend groß wählen (abh. von $J, b, a, C(E,V), K(E,V)$) und die Voraussetzung $m \geq 8J\,l^{b-1}$ benutzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} M &\geq 8J\,l^{b-1}(1-13Jl/L)-2/l\ \log(4CK)-L^{b-1} \qquad (28) \\ &\geq 8J\,L^{b-1} \qquad (29) \end{aligned}$$

Da $b-1$ größer ist als $b-a$, -1 und $a(b-1)$ dominiert der Term $8Jl^{b-1}$ alle anderen für großes l. Damit ist die Proposition bewiesen.
q.e.d.

Hiermit ist der geometrische Teil des Induktionsschrittes beendet und wir kommen zu dem wahrscheinlichkeitstheoretischen.

4.2 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Teil des Induktionsschrittes

Wieder sind einige technische Ergebnisse der eigentlichen Argumentation vorangestellt.

Lemma 4.9

Sei $J \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, $L = [l^a]_2$ und $l/2 > 2r$, sowie

$$P(J+1) := \mathbb{P}\,(\{\omega | \exists E \in I, \textit{ für welches mindestens } J+1 \textit{ 2r-disjunkte } (m,E)\textit{-singuläre Intervalle } \Lambda_l(z) \subset \Lambda_L(x) \textit{ mit } z \in \mathbb{Z}+x \textit{ existieren }\})\,.$$

Dann gilt : $P(J+1) \leq P(2)^{\frac{J+1}{2}}$.

Beweis

Offensichtlich gilt:

$\{\omega|$ für ein $E \in I$ existieren $J+1$ $2r$-disjunkte (m,E)-singuläre Intervalle der Länge l $\subset \Lambda_L(x)$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z}+x\}$

$\subset$

$\{\omega|$ für ein $E \in I$ existieren $\dfrac{J+1}{2}$ $2r$-disjunkte Paare von $2r$-disjunkten (m,E)-singulären Intervallen der Länge l $\subset \Lambda_L(x)$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z}+x\}$

Daraus folgt:

$\mathbb{P}(\{\omega|$ für ein $E \in I$ existieren $J+1$ $2r$-disjunkte (m,E)-singuläre Intervalle der Länge l $\subset \Lambda_L(x)$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z}+x\})$

$\leq$

$\mathbb{P}(\{\omega|$ für ein $E \in I$ existieren $\dfrac{J+1}{2}$ $2r$-disjunkte Paare von $2r$-disjunkten (m,E)-singulären Intervallen der Länge l $\subset \Lambda_L(x)$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z}+x\})$

$\leq$

$\mathbb{P}(\{\omega|$ für ein $E \in I$ existiert ein Paar von $2r$-disjunkten (m,E)-singulären Intervallen der Länge l $\subset \Lambda_L(x)$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{Z}+x\})^{\frac{J+1}{2}}$

q.e.d.

Lemma 4.10

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Energieintervall und $E_0 := \sup I$. Für die Anzahl der Eigenwerte EW (Vielfachheit mitgezählt) von H_{Λ_L} im Energieintervall $]-\infty, E_0]$ gilt :

$$\#\ \textit{EW in }\ ]-\infty, E_0] \leq \frac{L}{\pi}\sqrt{E_0 + c} \tag{30}$$

Dabei ist $c := ||V||_\infty$.

Die Abschätzung gilt natürlich auch für das Intervall I selbst.

Beweis

Für die Eigenwerte $e_n(L)$ des Laplaceoperators $-\Delta$ auf Λ_L gilt (vgl. [26]):

$$e_n(L) = (\pi/L)^2 n^2$$

und damit für die Eigenwerte E_n von $-\Delta + V$

$$E_n(L) \geq (\pi/L)^2 n^2 - c$$

wegen $|e_n - E_n| \leq c$. Also befinden sich im Energieintervall

$$]-\infty, (\pi/L)^2(n+1)^2 - c]$$

höchstens n Eigenwerte von H_{Λ_L}, ebenso in jedem Teilintervall davon. Daher impliziert

$$E < (\pi/L)^2(n+1)^2 - c\,, \tag{31}$$

daß $]-\infty, E]$ höchstens n Eigenwerte von H_{Λ_L} enthält. Falls wir zu gegebenem E $n+1 := \min\{m \in \mathbb{N} |\ m > (L/\pi)\sqrt{E+c}\ \}$ wählen, ist die Ungleichung (31) erfüllt.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \#\text{ EW von } H_{\Lambda_L} \text{ in }]-\infty, E] &\leq n \\ &= \min_{m\in\mathbb{N}}\{m > L/\pi\sqrt{E+c}\} - 1 \\ &\leq \frac{L}{\pi}\sqrt{E+c}\end{aligned}$$

q.e.d.

Da uns nur das Spektrum im Intervall $[E_1, E_2] := I$ interessiert, führen wir folgende Abkürzung ein :

$$\sigma'(H_{\Lambda_L}) := \sigma(H_{\Lambda_L}) \cap [E_1 - 1/2\exp(-\lambda^b), E_2 + 1/2\exp(-\lambda^b)]$$

Lemma 4.11

Seien Λ_1 und Λ_2 zwei $2r$-disjunkte Intervalle der Länge l_1 bzw. l_2. Die zugehörigen Schrödingeroperatoren seien

$$H_i := H^{\omega_i}_{\Lambda_i} := [-\Delta + V_0 + V^{\omega_i}]|_{\Lambda_i} \text{ für } i = 1,2\,.$$

Dann gilt :

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega|\ d(\sigma'(H_1),\sigma'(H_2))<\exp(-l_1^b)\ \})\leq\frac{\sqrt{E_2+c}}{\pi}\ \frac{l_2}{l_1^q}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)|\ d(\sigma'(H_1),\sigma'(H_2))<\exp(-l_1^b)\})\\
=\ &\int_\Omega\int_\Omega \mathbf{1}_{\{d(\sigma'(H_1),\sigma'(H_2))<\exp(-l_1^b)\}}(\omega_1,\omega_2)\ d\mathbb{P}(\omega_1)d\mathbb{P}(\omega_2)\\
=\ &\int_\Omega \mathbb{P}(\{\omega_1|\ d(\sigma'(H_1),\sigma'(H_2))<\exp(-l_1^b)\})\ (\omega_2)\ d\mathbb{P}(\omega_2)\\
\leq\ &\mathbb{E}_{\omega_2}\left(\sum_{\lambda\in\sigma'(H_2)}\mathbb{P}(\{\omega_1|\ d(\sigma'(H_1),\lambda)<\exp(-l_1^b)\})\right)\\
\leq\ &\mathbb{E}_{\omega_1}\left(\frac{l_2}{l_1^q}\frac{\sqrt{E_2+c}}{\pi}\right)\\
=\ &\frac{1}{\pi}\sqrt{E_2-c}\ \frac{l_2}{l_1^q}
\end{aligned}$$

Dabei benutzten wir zuerst die Wegner-Abschätzung (H2) und dann das vorangehende Lemma.
q.e.d.

In Anlehnung an die Notation 4.6 definieren wir die etwas schwächeren Aussagen:

Notation 4.12
Für ein Intervall $\Lambda_L(x)$ definieren wir die Eigenschaften:
(i) :$\Leftrightarrow$ $d(E,\sigma(H_{\Lambda_L(x)}))\geq\frac{1}{2}\exp(-L^b)$
(ii) :$\Leftrightarrow$ für alle $\Lambda_{3lj}(z)\subset\Lambda_L(x)$ mit $z\in\mathbb{Z}+x$ und $j\in\{1,...,J\}$
gilt $d(E,\sigma(H_{\Lambda_{3lj}(z)}))\geq\frac{1}{2}\exp(-(3lj)^b)$
(iii) :$\Leftrightarrow$ (III)

Proposition 4.13

Sei J die kleinste ungerade Zahl $> \frac{p+1}{p-1}$ und $a_0 = \frac{(J+1)p}{2p+J+1}$. Wählen wir ein $a \in]1, a_0[$. Dann existiert ein $Q_2 = Q_2(p, q, a, I, \|V\|_\infty)$, so daß für $l \geq Q_2$ aus :

$$R(l,m) \textit{ ist wahr und}$$
$$\text{(H2)} \textit{ ist wahr für alle } L \geq l$$

folgt :

$$\mathbb{P}(\{\omega | \forall E \in I \textit{ gelten (i), (ii) und (iii) entweder für } \Lambda_L(x) \textit{ oder für } \Lambda_L(y)\}) \geq 1 - L^{-2p} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z} + \tau \textit{ mit } |x-y| > L + 2r \quad .$$

Dabei wurde wieder $L = [l^a]_2$ gesetzt.

Beweis

Wählen wir $x, y \in \mathbb{Z} + \tau$ mit $|x - y| > L + 2r$. Dann sind die Ereignisse in $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$ unabhängig voneinander. Seien $H_1 := H_{\Lambda_{l_1}(x')}$ und $H_2 := H_{\Lambda_{l_2}(y')}$ für $x' \in (\mathbb{Z} + x) \cap \Lambda_L(x)$ und $y' \in (\mathbb{Z} + y) \cap \Lambda_L(y)$. Sei $l_1 \wedge l_2 := \min\{l_1, l_2\}$ und $S \subset \Omega$ das Ereignis:

$$S := \{d(\sigma'(H_1), \sigma'(H_2)) < \exp(-(l_1 \wedge l_2)^b) \text{ für ein } \Lambda_{l_1}(x') \subset \Lambda_L(x) \text{ mit } x' \in \mathbb{Z} + x, \text{ ein } \Lambda_{l_2} \subset \Lambda_L(y) \text{ mit } y' \in \mathbb{Z} + y \text{ und } l_1, l_2 \in \{L, 3ls | s = 1, ..., J\}\}$$

Für die zugehörige Wahrscheinlichkeit gilt :

$$\mathbb{P}(S) \leq (J+1)^2 (L+1)^2 \frac{L}{(3l)^q} \left(\frac{\sqrt{E_2 - c}}{\pi}\right) \tag{32}$$

Dabei verwenden wir die Abschätzung aus dem vorhergehenden Lemma. Nun sei $E \in I$ gewählt und

$$l' := \max\{l_0 \in \{L, 3ls | s = 1, ..., J\} | \exists \Lambda_{l_0}(z') \subset \Lambda_L(z) \text{ mit } z \in \{y, x\} \text{ und } z' \in \mathbb{Z} + z \text{ , so daß } d(\sigma'(H_{\Lambda_{l_0}(z')}), E) < 1/2 \exp(-l_0^b)\}$$

Falls die Menge, über die das Maximum genommen wird, leer ist, gelten (i) und (ii) bereits für $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$. Falls sie nicht leer ist, sei $\Lambda_{l'}(z')$ ein Intervall, wie es in der Menge beschrieben wird und welches die maximale Länge l' hat. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $z = x$.

Nehmen wir an, das Ereignis S tritt nicht ein. Sei $l'' \in \{L, 3ls | s = 1, ..., J\}$ und $\Lambda_{l''}(y') \subset \Lambda_L(y)$ mit $y' \in \mathbb{Z} + y$.

$$\Rightarrow \; d(\sigma'(H_{\Lambda_{l'}(z')}), \sigma'(H_{\Lambda_{l''}(y')})) \geq \exp(-(l' \wedge l'')^b)$$

Im Fall $l'' > l'$ gilt nach Definition von l' schon

$$d(\sigma'(H_{\Lambda_{l''}(y')}), E) \geq 1/2 \exp(-l''^b)$$

Andernfalls ($l'' \leq l'$) ist:

$$\exp(-(l' \wedge l'')^b) = \exp(-l''^b)$$

und wir erhalten mit der zweiten Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(\sigma'(H_{\Lambda_{l''}(y')}), E) &\geq d(\sigma'(H_{\Lambda_{l''}(y')}), \sigma'(H_{\Lambda_{l'}(z')})) - d(\sigma'(H_{\Lambda_{l}(z')}), E) \\ &> \exp(-l''^b) - \frac{1}{2}\exp(-l'^b) \\ &\geq \exp(-l''^b) - \frac{1}{2}\exp(-l''^b) \\ &\geq \frac{1}{2}\exp(-l''^b) \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \sigma(H_{\Lambda_{l''}(y')}) \setminus \sigma'(H_{\Lambda_{l''}(y')})$ gilt schon nach der Definition von σ'

$$d(\lambda, E) \geq d(\lambda, I) > 1/2 \exp(-l''^b)$$

Also folgt, daß für $\Lambda_{l''}(y)$ die Ungleichungen in (i) und (ii) gelten. Wir haben bewiesen:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{\omega | \; \forall E \in I \text{ gelten (i) und (ii) entweder für } \Lambda_L(x) \text{ oder } \Lambda_L(y)\}) \\ &\geq 1 - k\frac{(L+1)^3}{l^q} \end{aligned}$$

Dabei ist $k := \frac{\sqrt{E_2 - c}}{3^q \pi}(J+1)^2$

Jetzt wird noch die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt, daß ein $E \in I$ existiert, für welches (iii) im Intervall $\Lambda_L(z)$ nicht gilt. Mit der Notation aus Lemma 4.9 ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit die obere Schranke:

$$P(J+1) \leq P(2)^{\frac{J+1}{2}} \leq \left(\frac{(L+1)^2}{l^{2p}}\right)^{\frac{J+1}{2}} \tag{33}$$

Denn nach Voraussetzung gilt R(l,m), woraus für 2r-disjunkte Intervalle Λ_l, Λ_l' folgt:

$$\mathbb{P}(\{\omega|\ \exists E \in I \text{ mit : } \Lambda_l \text{ und } \Lambda_l' \text{ sind } (E,m)\text{-singulär } \}) \leq l^{-2p}$$

Die Anzahl der auftretenden Summanden schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\# \text{ der Paare 2r-disjunkter Intervalle } \Lambda_l \text{ in } \Lambda_L \ \leq \ (L+1)^2$$

Da z sowohl x als auch y sein kann, muß die Wahrscheinlichkeit (33) doppelt subtrahiert werden. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\omega|\forall E \in I \text{ gilt (i), (ii) und (iii) für } \Lambda_L(x) \text{ oder } \Lambda_L(y)\} \\
&\geq 1 - \frac{(L+1)^3}{l^q}k - 2\left(\frac{L+1}{l^p}\right)^{J+1}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist größer als $1 - L^{-2p}$ für genügend großes l (abh. von p, q, a, k, J). In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(L+1)^2}{l^q}k + 2\left(\frac{l+1}{l^q}\right)^{J+1} \quad &\leq \quad \frac{(2l^a)^3}{l^q}k + 2(\frac{2l^a}{l^q})^{J+1} \\
&\leq \quad 8kl^{3a-q} + 2^{J+1}l^{(a-p)(J+1)}
\end{aligned}$$

Die Exponenten kann man abschätzen:

$$\begin{aligned}
&a < a_0 = \frac{(J+1)p}{2p+L+1} \\
\Leftrightarrow \quad &2pa - (J+1)a < (J+1)p \\
\Leftrightarrow \quad &2pa < (J+1)p - (J+1)a = (J+1)(p-a) \\
\Leftrightarrow \quad &-2pa > (a-p)(J+1)
\end{aligned}$$

$$q > 4p + 6 > 2ap + 3a \ \Rightarrow \ \ 3a - q < -2pa$$

Also gilt für hinreichend großes l:

$$8kl^{3a-q} + 2^{J+1}l^{(a-p)(J+1)} \leq l^{-2pa} \leq L^{-2p}$$

q.e.d.

Wir zeigen noch $a_0 < 2$. Dann eignet sich dieser Exponent aus der vorhergehenden Proposition 4.13 für die Proposition 4.7. Wie schon definiert ist J die kleinste ungerade Zahl $> \frac{p+1}{p-1}$.

$$\Rightarrow \; J \leq \frac{p+1}{p-1} + 2 = \frac{3p-1}{p-1}$$

Wir folgern weiter

$$\begin{aligned}
p > 1 \quad &\Rightarrow \quad 4 < 6 < 6p \\
&\Rightarrow \quad 3p^2 - 7p + 2 < 3p^2 - p - 2 \\
&\Rightarrow \quad (3p-1)(p-2) < (p-1)(3p+2) \\
&\Rightarrow \quad J \leq \frac{3p-1}{p-1} < \frac{3p+2}{p-2} = \frac{4p}{p-2} - 1 \\
&\Rightarrow \quad (J+1)(p-2) < 4p \\
&\Rightarrow \quad (J+1) < 4p + 2(J+1) \\
&\Rightarrow \quad a_0 = \frac{(J+1)p}{2p+J+1} < 2
\end{aligned}$$

q.e.d.

Bisher sind die Resultate, die uns die wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen liefern, noch etwas schwächer als die Voraussetzungen, die nötig sind, um den geometrischen Teil des Induktionsschrittes durchzuführen. Es stehen uns Aussagen über das Spektrum zu Verfügung, aus denen wir welche für die Greensche Funktion ableiten werden. Zur Erinnerung siehe die Notationsvereinbarungen 4.6 und 4.12.

Lemma 4.14
Aus (i) folgt (I) und aus (ii) folgt (II). Dabei ist die Konstante K in (I) bzw. (II) gleich derjenigen in Lemma 8.8 in Anhang:

$$K = C_{11}^2 = (3 + 8C_8(1) + 2|E| + 2||V||_\infty)^2$$

Beweis
Es gilt:

$$(i) \quad \Leftrightarrow \quad d(E, \sigma(H_{\Lambda_L(x)})) \geq 1/2 \exp(-L^b)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad ||R_{\Lambda_L(x)}(E)|| \leq 2\exp(L^b) \\
&\Rightarrow \quad |G_L(z,y)| \leq 2K\exp(L^b) \quad \forall (z,y) \in \Lambda_L(x) \setminus \delta \\
&\Rightarrow \quad (I)
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt genauso.
q.e.d.

Lemma 4.15
Sei $s > 0$, $L_0 > 1$ und $L_{k+1} = [L_k^a]_2$. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{-s} \leq k_0 L_0^{-s} + \left(\frac{2}{L_0}\right)^{sk_0} \frac{1}{1-(2/L_0)^s}\ ,$$

wobei $k_0 = k_0(a) \in \mathbb{N}$ unabhängig von L_0 und s ist.

Beweis
Es existiert ein k_0 mit $a^k \geq k$ für alle $k \geq k_0(a)$. Für diese k gilt auch

$$(1/2)^k L_0^{a^k} \geq (1/2)^k L_0^k$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{-s} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [(1/2)^k L_0^{a^k}]^s \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} [(1/2)^k L_0^k]^s + \sum_{k=0}^{k_0-1} [(1/2)^k L_0^{a^k}]^s \\
&\leq (2/L_0)^{sk_0} \frac{1}{1-(2/L_0)^s} + k_0/L_0^s
\end{aligned}$$

Denn für hinreichend großes L_0 gilt:

$$(1/2)^k L_0^{a^k} \geq L_0 \text{ für } k = 0, ..., k_0$$

q.e.d.

Bemerkung 4.16

Bei dem k-ten Induktionsschritt wird das Gewicht des exponentiellen Abfalls der Greensche Funktion von $m_{k-1} := m$ auf $m_k := M$ verkleinert (vgl. Proposition 4.7). Wir zeigen, daß der Verlust während der gesamten Induktion weniger als $m_0 - m_\infty$ beträgt. Dadurch weiß man, daß $m_\infty \le m_k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist m_∞ eine untere Schranke für den Exponenten des Abfalls auf allen Skalen.

Wir wollen also zeigen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(m_{k-1} - m_k) \le m_0 - m_\infty$$

$$\Leftrightarrow m_\infty \le m_0 - \sum_{k=0}^{\infty}(m_k - m_{k+1})$$

Nach der Ungleichung in Lemma (4.7) gilt

$$\begin{aligned}
m_{k+1} &\ge m_k - 11J\frac{L_k}{L_{k+1}}m_k - l^{-1}\log(4CK) - 2L_{k+1}^{b-1} \\
\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(m_k - m_{k+1}) &\le 11J\sum_{k=0}^{\infty} m_k\frac{L_k}{L_{k+1}} + 2\log(4CK)\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} L_{k+1}^{b-1} \\
&\le 22Jm_0\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{1-a} + 2\log(4CK)[k_0L_0^{-1} + (\frac{2}{L_0})^{k_0}\frac{1}{1-(2/L_0)^{-1}}] \\
&\quad + 2^{b-1}2[k_0L_0^{a(b-1)} + (\frac{2}{L_0})^{a(1-b)k_0}\frac{1}{1-(2/L_0)^a(b-1)}] \\
&\le 22Jm_0[k_0L_0^{1-a} + (\frac{2}{L_0})^{(a-1)k_0}\frac{1}{1-(2/L_0)^{1-a}}] \\
&\quad + 2\log(4CK)[k_0L_0^{-1} + (\frac{2}{L_0})^{k_0}\frac{1}{1-(2/L_0)^{-1}}] \\
&\quad + 4[k_0L_0^{a(b-1)} + (\frac{2}{L_0})^{a(1-b)k_0}\frac{1}{1-(2/L_0)^{a(b-1)}}] \\
&\le 22Jm_0(k_0+4)L_0^{1-a} + 2\log(4CK)(k_0+4)L_0^{-1} \\
&\quad + 2(k_0+4)L_0^{a(b-1)}
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung bekommen wir durch Anwendung des vorhergehenden Lemmas 4.15 mit $s = -1, b-1$ bzw. $1-a$ für genügend großes L_0 (abh. von

a und b). Die rechte Seite ist kleiner als $m_0 - m$, falls gilt

$$\begin{array}{rcccl} c_1 L_0^{-1} & \leq & 1/3(m_0 - m_\infty) & = & 1/6 m_0 \\ c_2 L_0^{a(b-1)} & \leq & 1/3(m_0 - m_\infty) & = & 1/6 m_0 \\ c_3 L_0^{1-a} & \leq & 1/3 \frac{m_0 - m_\infty}{m_0} & = & 1/6 \end{array} \tag{34}$$

Dabei hängen die Konstanten c_1, c_2 und c_3 von J, a, b, C, K ab, nicht aber von L_0, m_0 und m. Man beachte, daß wegen Lemma 4.14 $K = C_{11}^2$ gilt. Die Gleichheitszeichen in (34) ergeben sich, weil anfangs $m_\infty = \frac{1}{2} m_0$ gesetzt wurde.

5 Exponentieller Abfall der Eigenfunktionen

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie aus dem exponentiellen Abfall der Greenschen Funktion auf allen Skalen $L_k,\ k \in \mathbb{N}$ auf dieselbe Eigenschaft der Eigenfunktionen von H auf $\mathbb{R}$ geschlossen werden kann. Unser Vorgehen ist wie im vorigen Kapitel über die Multiskalen-Analyse eine Adaption von [9] für den kontinuierlichen Fall.

Sei $\mathrm{R}(l, m_\infty)$ bewiesen für alle Skalen $l \in \{L_k | k \in \mathbb{N}\}$.

Definition 5.1

Wir nennen E einen verallgemeinerten Eigenwert des Schrödingeroperators $H = -\Delta + V$ (auf $\mathbb{R}$), falls eine polynomial beschränkte Funktion $\psi \not\equiv 0$ existiert, so daß $H\psi = E\psi$ gilt. Dieses ψ heißt verallgemeinerte Eigenfunktion.

Satz 5.2

Sei ν das Spektralmaß von H. Dann sind ν-fast alle Energien $E \in \mathbb{R}$ verallgemeinerte Eigenwerte von H.

Beweis

Vergleiche [27] oder [5].

Wir verwenden nun für eine Eigenfunktion ψ die Formel (10) aus dem Kapitel 4:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \int_{\Lambda_L} G_L(x,y,E)[-\Delta + V(x) - E]\psi(x)\,dx \\ &\quad + [\psi D_1 G_L(\cdot,y,E) - G_L(\cdot,y,E)\psi']_{-L/2}^{+L/2} \\ &= \psi(L/2) D_1 G_L(L/2,y,E) - \psi(-L/2) D_1 G_L(-L/2,y,E) \end{aligned}$$

Dabei benutzt man die Eigenschaften :

$(-\Delta + V - E)\psi = 0$, da ψ Eigenfunktion ist und
$G_L(\pm L/2, y, E) = 0$, da H_L Dirichlet-Randbedingungen hat.

Diese Formel gilt ebenso für $\Lambda_L(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig statt 0. Wir definieren nun für $x_0 \in \mathbb{Z} + \tau$

$$A_{k+1}(x_0) := [\Lambda_{2vL_{k+1}}(x_0) \setminus \Lambda_{2L_k+4r}(x_0)] \cap [\mathbb{Z} + x_0]$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $v \in \mathbb{N}$ später festgelegt wird. Sei $E_k(x_0)$ das Ereignis :

$$\begin{aligned} E_k(x_0) \quad := \quad & \{\omega | \Lambda_k(x_0) \text{ und } \Lambda_k(x) \text{ sind} \\ & (m_\infty, E)\text{-singulär für ein } E \in \mathbb{R} \text{ und ein } x \in A_{k+1}(x_0)\} \end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\rho \in]0,1[$ wählen wir $v > \frac{1+\rho}{1-\rho}$ und definieren für alle $k \in \mathbb{N}$

$$A'_{k+1}(x_0) := [\Lambda_{\frac{2v}{1+\rho}L_{k+1}}(x_0) \setminus \Lambda_{\frac{2}{1-\rho}L_k}(x_0)] \cap [\mathbb{Z} + x_0] \tag{35}$$

Es gilt offensichtlich die Inklusion:

$$A'_{k+1}(x_0) \subset A_{k+1}(x_0)$$

Wegen der Wahl von x_0 sind die Gitter $\mathbb{Z} + \tau$ und $\mathbb{Z} + x_0$ gleich. Da im folgenden x_0 im Mittelpunkt des Geschehens steht, ziehen wir es vor, $\mathbb{Z} + x_0$ statt $\mathbb{Z} + \tau$ zu schreiben.

Lemma 5.3
Sei

$$\Omega_0 := \{\omega | \forall x_0 \in \mathbb{Z} + \tau \ \exists k(x_0) \in \mathbb{N} \text{ , so daß } E_k(x_0) \text{ nicht eintritt für } k \geq k(x_0)\}$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(\Omega_0) = 1 \tag{36}$$

Beweis

$$\begin{aligned} E_k(x_0) \subset \bigcup_{x \in A_{k+1}(x_0)} & \{\Lambda_k(x_0) \text{ und } \Lambda_k(x) \text{ sind} \\ & (m_\infty, E)\text{-singulär für ein } E \in I\} \end{aligned}$$

Nun benutzen wir $R(L_k, m_\infty)$ zur Abschätzung des Maßes dieser Vereinigung:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{P}\{E_k(x_0)\} &\leq \sum_{x\in A_{k+1}(x_0)} L_k^{-2p} \\
&\leq \frac{2vL_{k+1}+1}{L_k^{2p}} \\
&\leq 5v\frac{[L_k^a]_2}{L_k^{2p}} \\
&\leq 5vL_k^{a-2p} \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Wegen $a < 2p$ und Lemma (4.15) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{E_k(x_0)\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 5vL_k^{a-2p} < \infty$$

Mit dem Borel-Cantelli Lemma folgt für jedes $x_0 \in \mathbb{Z} + \tau$:

$$\mathbb{P}(\{\omega | E_k(x_0) \text{ tritt ein für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}) = 0 \ ,$$

Die Vereinigung von Nullmengen ist ebenfalls eine:

$$\mathbb{P}(\{\omega | \ \exists x_0 \in \mathbb{Z} + \tau, \text{ so daß } E_k(x_0) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N} \text{ eintritt } \}) = 0 \ ,$$

d.h. das Komplement von Ω_0 hat Maß 0.
q.e.d.

Notation 5.4
Wir bezeichnen mit

$$\partial A_{k+1}(x_0)$$

die zwei innersten und die zwei äußersten Punkte in $A_{k+1}(x_0)$, d.h. diejenigen $x \in A_{k+1}(x_0) \subset \mathbb{Z} + x_0$ für die

$$|x - x_0|$$

sein Minimum bzw. Maximum annimmt.

Lemma 5.5
Es gilt:
a) $d(x, \partial A_{k+1}(x_0)) \geq \rho|x - x_0| - 2r$ *für alle* $x \in A'_{k+1}(x_0)$.
b) Das Mengensystem $\{A'_{k+1}(x_0)\}_{k\geq k'}$ *schöpft* $(\mathbb{Z} + x_0) \setminus \Lambda_{\frac{2}{1-\rho}L_{k'}}(x_0)$ *aus.*

Beweis

Zu a) Skizze: Es wird nur der Fall $x_0 < x$ gezeigt, der andere ist symmetrisch.

Zuerst zeigen wir, daß der Abstand d_1 von x zu dem Element von $\partial\Lambda_{k+1}(x_0)$, welches größeren Abstand zu x_0 hat als x selbst, größergleich $\rho|x - x_0|$ ist.

$$\begin{aligned} d_1 &\geq vL_{k+1} - \frac{v}{1+\rho}L_{k+1} \\ &= v(1 - \frac{1}{1+\rho})L_{k+1} \\ &= v\frac{\rho}{1+\rho}L_{k+1} \\ \text{und } |x - x_0| &\leq \frac{v}{1+\rho}L_{k+1} \\ \Rightarrow \rho|x - x_0| &\leq v\frac{\rho}{1+\rho}L_{k+1} \\ &\leq d_1 \end{aligned}$$

Nun schätzen wir den Abstand d_2 von x zu dem Element von $\partial A_{k+1}(x_0) \subset \mathbb{Z}+x_0$, welches zwischen x und x_0 liegt, ab. Wir bezeichnen mit d den Abstand von x zum inneren Rand von $A'_{k+1}(x_0)$.

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{1-\rho}L_k - L_k - 2r + d \\ &= d - 2r + (\frac{1}{1-\rho} - 1)L_k \\ &= d - 2r + \frac{\rho}{1-\rho}L_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= \frac{1}{1-\rho}L_k + d \\ \Rightarrow \rho|x - x_0| &= \frac{\rho}{1-\rho}L_k + \rho d \\ &\leq d_2 + 2r \end{aligned}$$

Zu b) Wir vergessen für einen Moment, daß A'_k nur aus Gitterpunkten besteht, und betrachten es als Vereinigung von zwei Intervallen von der in Gleichung (35) vorgegebenen Größe.

$$\begin{aligned} \inf\{|x|\,|x \in A'_{k+1}(x_0)\} &= \frac{1}{1-\rho}L_k \\ \sup\{|x|\,|x \in A'_k(x_0)\} &= \frac{v}{1+\rho}L_k \\ v > \frac{1+\rho}{1-\rho} \Rightarrow \frac{v}{1+\rho}L_k &> \frac{1}{1-\rho}L_k\ , \end{aligned}$$

d.h. die konzentrischen ‚Rahmen' $A'_k(x_0)$ überlappen sich gegenseitig. Nur die Punkte des Gitters $\mathbb{Z} + x$ in $\Lambda_{\frac{2}{1-\rho}L_{k'}}(x_0)$ werden von

$$\bigcup_{k \geq k'} A'_{k+1}(x_0)$$

nicht überdeckt.
q.e.d.

Sei I das Energieintervall, für welches die Aussagen $R(L_k, m_\infty)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ gelten, und:

$$E \in I' := I \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{Z}+\tau} \sigma(H_{\Lambda_k(x_0)}) \tag{37}$$

Die auf ein Intervall restringierten Schrödingeroperatoren haben eine kompakte Resolvente und demnach diskretes Spektrum (vgl. [26]). Also ist die Ausnahmemenge in Gleichung (37) abzählbar, d.h. besteht aus der Vereinigung einer ν-Nullmenge mit einzelnen Punkten, die eine positive Masse tragen, also Eigenwerte sind. Ein $E \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert nur mit Maß 0 (vgl. [17]), daher liegen in der abzählbaren Ausnahmemenge Eigenwerte nur für ω aus einer Nullmenge $N \subset \Omega$.

Sei nun $\psi \not\equiv 0$ eine polynomial beschränkte Lösung von $(-\Delta + V - E)\psi = 0$ auf $\mathbb{R}$, wobei $E \in I'$ und $\omega \in \Omega_0$ (vgl. Lem. 5.3) sind. Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|\psi(x)| = \alpha > 0$. Sei x_0 die zu x nähest gelegene Zahl aus dem Gitter $\mathbb{Z} + \tau$, dann gilt $x \in \Lambda_1(x_0)$.

Lemma 5.6
Es existiert ein $k_1(x_0) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_1(x_0)$ das Intervall $\Lambda_k(x_0)$ (m_∞, E)-singulär ist.

Beweis
Falls $\Lambda_k(x_0)$ (m_∞, E)-regulär ist, gilt mit der Darstellungsformel in Lemma (4.1):

$$
\begin{aligned}
|\psi(x)| &\leq |\psi(x_0 + L_k/2)|\,|D_1 G_{\Lambda_k(x_0)}(x_0 + L_k/2, x, E)| \\
&+ |\psi(x_0 - L_k/2)|\,|D_1 G_{\Lambda_k(x_0)}(x_0 - L_k/2, x, E)| \\
&\leq 2 \max_{+,-} |\psi(x_0 \pm L_k/2)| C \exp(-m_\infty L_k/2) \\
&\leq 2C \exp(-m_\infty L_k/2)\ const.(1 + |x_0| + L_k/2)^n \\
&\rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty
\end{aligned}
$$

Dabei benutzten wir, daß ψ höchstens polynomial wächst. Die erhaltene Ungleichung ist falsch, sobald die rechte Seite kleiner als α wird.
q.e.d.

Von früher wissen wir schon, daß für $k \geq k(x_0)$ das Ereignis $E_k(x_0)$ nicht eintritt. Es folgt für alle $k \geq k_2 := \max(k(x_0), k_1(x_0))$: alle $\Lambda_k(x')$ mit $x' \in A_{k+1}(x_0)$ sind (m_∞, E)-regulär.

Sei nun

$$
y \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_{\frac{2}{1-\rho} L_{k'} + 2}(x_0) \tag{38}
$$

beliebig. Vorerst sei $k' = k_2$ gewählt, nachträglich werden wir k' noch wegen einiger Abschätzungen vergrößern. Bezeichnen wir mit y_0 die zu y näheste Zahl aus dem Gitter $\mathbb{Z}+x_0$. Dann gilt: $y \in \Lambda_1(y_0)$. Es existiert ein $k \geq k'$ mit (vgl. Lemma 5.5, Teil b)):

$$y_0 \in A'_{k+1}(x_0) \subset \mathbb{Z}+x_0 = \mathbb{Z}+\tau$$

Nun verwenden wir die Regularität der Λ_k mit Mittelpunkt in $A_{k+1}(x_0)$ für folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\psi(y)| &\leq 2 \max_{+,-} |\psi(y_0 \pm L_k/2)| C \exp(-m_\infty L_k/2) \\ &\leq (2C \exp(-m_\infty L_k/2))^i \max_{+,-} |\psi(y_i)| \end{aligned}$$

für ein $y_i \in \mathbb{Z}+y_0 = \mathbb{Z}+\tau$ mit $|y_0 - y_i| \leq iL_k/2$. Damit wir mit y_i nicht über den ‚regulären' Bereich $A_{k+1}(x_0)$ hinausschreiten, wird für i verlangt:

$$\begin{aligned} i &\leq \frac{d(y, \partial A_{k+1}(x_0))}{L_k/2} \\ & \frac{d(A'_{k+1}(x_0), \partial A_{k+1}(x_0))}{L_k/2} \end{aligned}$$

Es ist möglich i so zu wählen, daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_k} d(A'_{k+1}(x_0), \partial A_{k+1}(x_0)) &\geq i \\ &\geq \frac{2}{L_k} d(A'_{k+1}(x_0), \partial A_{k+1}(x_0)) - 1 \\ &\geq \frac{2}{L_k}(\rho|x_0 - y_0| - 2rL_k/2) \\ &\geq \frac{2}{L_k}(\rho|x_0 - y| - \rho - 2r - L_k/2) \end{aligned}$$

Wir benutzten Lemma 5.5, Teil a). Es folgt:

$$\begin{aligned} |\psi(y)| &\leq (2C)^i \exp(-m_\infty L_k/2)^{(2/L_k)(\rho|x_0-y|-\rho-2r-L_k/2)} |\psi(y_i)| \\ &= (2C)^i \exp(-m_\infty(\rho|x_0 - y| - \rho - 2r - L_k/2)) |\psi(y_i)| \end{aligned}$$

Wegen $y \in A'_{k+1}(x_0)$ gilt:

$$|x_0 - y| \geq \frac{1}{1-\rho} L_k/2 \geq L_k$$

damit auch

$$|x_0 - y|^a \geq L_k^a \geq L_{k+1}$$

und somit

$$-m_\infty(\rho|x_0 - y| - L_k/2) \leq -m_\infty(\rho - 1/2)|x_0 - y|$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ |\psi(y)| &\leq \exp(i\log(2C) - m_\infty(\rho - 1/2)|x_0 - y| + m_\infty\rho + 2m_\infty r)|\psi(y_i)| \\ &\leq \exp(2v\frac{L_{k+1}}{L_k}\log(2C) + m_\infty\rho + 2m_\infty r - m_\infty(\rho - 1/2)|x_0 - y|)|\psi(y_i)|\end{aligned}$$

denn $i \leq \frac{2}{L_k}d(A'_{k+1}(x_0), \partial A_{k+1}(x_0)) \leq \frac{2}{L_k}vL_{k+1}$. Für beliebiges $\rho' \in]0,1[$ folgt, falls man L_k genügend groß wählt:

$$|\psi(y)| \leq \exp(-m_\infty\rho'(\rho - 1/2)|x_0 - y| \tag{39}$$

Der Beweis verläuft folgendermaßen: Nehmen wir ein $\rho'' \in]0,1[$. Dafür gilt:

$$2v\log(2C)\frac{L_{k+1}}{L_k} + 2m_\infty r + m_\infty\rho m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2)(1 - \rho'') < 0$$

für $k \geq k_3$. Dabei wählen wir ohne Einschränkung $\rho > 1/2$ und benutzen:

$$|x_0 - y| \geq \tfrac{1}{1-\rho}, \text{ d.h. wächst mindestens linear in } L_k$$
$$\tfrac{L_{k+1}}{L_k} = \tfrac{[L_k^a]_2}{L_k} \leq \tfrac{L_k^a}{L_k} = L_k^{a-1} \text{ wegen } a < 2 \text{ wächst dies langsamer als linear in } L_k$$

Man bekommt für jedes $\rho' \in]0, \rho''[$, falls man L_k hinreichend groß wählt:

$$\begin{aligned}|\psi(y)| &\leq \exp(-2v\log(2C)\frac{L_{k+1}}{L_k} + 2m_\infty r + m_\infty\rho - m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2))|\psi(_iy)| \\ &\leq \exp(-m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2)\rho'')const.(|x_0 - y| + |x| + L_{k+1} + 1)^n \\ &\leq \exp(-m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2)\rho') \ \times \\ &\quad\ \exp(-m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2)(\rho'' - \rho'))const.((2|x_0 - y|^a + |x| + 1)^n \\ &\leq \exp(-m_\infty|x_0 - y|(\rho - 1/2)\rho')\end{aligned}$$

Bisher haben wir zeigen können:

$$|\psi(y)| \leq \exp(-m_\infty\rho'(\rho - 1/2)|x_0 - y|)$$
$$\text{für } \rho > 1/2 \text{ und } y \text{ mit } |x_0 - y| > \tfrac{1}{1-\rho}L_{k_3} + 1$$

Daraus folgt für y wie eben:

$$\begin{aligned} \frac{\log|\psi(y)|}{|y|} &\leq \frac{-m_\infty \rho'(\rho-1/2)|x_0-y|}{|y|} \\ &\leq -m_\infty \rho'(\rho-1/2) + \frac{m_\infty \rho'(\rho-1/2)|x|}{|y|} \end{aligned}$$

wegen der zweiten Dreiecksungleichung $|x_0 - y| \geq |y| - |x_0|$. Dies liefert:

$$\limsup_{|y|\to\infty} \frac{\log|\psi(y)|}{|y|} \leq -m_\infty \rho'(\rho-1/2)$$

Aus dieser Abschätzung folgt mit Hilfe des nachfolgenden Lemmas der exponentielle Abfall der Eigenfunktion ψ mit der Masse $1/2m_\infty = m$.
q.e.d.

Lemma 5.7
Die Funktion ψ falle exponentiell ab mit der Masse m' für alle positiven $m' < m$. Dann gilt der exponentielle Abfall auch mit der Masse m.

Beweis
Wäre die Aussage des Lemmas falsch, dann würde gelten: es existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x_n| \to \infty$ und $|\psi(x_n)| > \exp((-m-\epsilon)|x_n|)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wähle $m' \in]0, m[$ und ein $\epsilon' > 0$, so daß gilt $m' - \epsilon' > m - \epsilon$, z.B. $m' = m - \epsilon/2$ und $\epsilon' = \epsilon/4$. Nach Voraussetzung existiert ein $N(m', \epsilon') = N \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$|\psi(x)| \leq \exp(-(m'-\epsilon')|x|) \leq \exp(-(m-\epsilon)|x|)$$

für alle x mit $|x| > N$. Dies liefert einen Widerspruch, sobald $|x_n| > N$ wird.
q.e.d.

6 Nachweis der Induktionsvoraussetzung (H1)

Wir betrachten den Fall, wo H ein zufällig gestörter, periodischer Schrödingeroperator ist und beweisen die Induktionsvoraussetzung (H1) an den Rändern einer Spektrallücke. In [22] verwendet Klopp dieselbe Technik, um am Infimum des Spektrums die Hypothese (H1) nachzuweisen. Genauer gesagt, zeigen wir für ein geeignetes Energieintervall I:

Es gibt ein Q_3, so daß für $L_0 \in \mathbb{N}, L_0 \geq Q_3$ ein $\tau := \tau(L_0) \in]-1/2, 1/2]$ und ein $m_0 > 0$ existieren mit der Eigenschaft:

$$\mathbb{P}\{\forall E \in I, x' \in \Lambda_1(x), y \in \delta\Lambda_L(x) \text{ gilt } |G_{\Lambda_L(x)}(y, x', E)| \leq \exp(-m_0 L_0/2)\} \geq 1 - L^{-p}$$

für jedes $x \in L_0\mathbb{Z} + \tau$. Dabei hängt Q_3 von a, b, m_0, I, V_0 und dem Störpotential κV^ω ab, nicht aber von ω selbst.

Für unser zufälliges Potential V^ω haben wir angenommen, daß die Zufallsvariablen $t(\cdot, i)$, $i \in \mathbb{Z}$ unabhängig und gleichverteilt sind (vgl. Gleichung (5)). Daher ändert sich die Gültigkeit der obigen Aussage nicht, falls man zu τ eine ganze Zahl hinzuaddiert. Die Abhängigkeit der Konstanten Q_3 von a und b ergibt sich daraus, daß das Verhältnis von L_0 und m_0 mit den Bedingungen aus Bemerkung 4.16 verträglich sein muß.

Wie schon erwähnt, besteht das Spektrum des periodischen Schrödingeroperators H_0 aus Bändern mit Lücken dazwischen:

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E_{n,-}, E_{n,+}] \,. \tag{40}$$

Für das zufällige Potential V^ω gelte die Voraussetzung (H3) aus Kapitel 2. Sei $]E'_-, E'_+[$ eine Spektrallücke, d.h. $]E'_-, E'_+[\cap \sigma(H_0) = \emptyset$. Wir wählen κ so klein, daß auch das Spektrum des zufällig gestörte Operators $H^\omega = H_0 + \kappa V_\omega$ eine Lücke aufweist:

$$]E''_-, E''_+[\cap \sigma(H^\omega) = \emptyset \tag{41}$$

mit $]E''_-, E''_+[\subset]E'_-, E'_+[$ und definieren:

$$E_- := \sup\{\sigma(H^\omega) \cap]-\infty, E''_+[\}$$
$$E_+ := \inf\{\sigma(H^\omega) \cap]E''_-, +\infty[\}$$

Die Integrierte Zustandsdichte fällt exponentiell ab an den Rändern des Spektrums $\sigma(H)$ (vgl. die Arbeit [24] von Mezincescu):

$$\lim_{E \to E_\pm} \frac{\log |\log |N(E) - N(E_\pm)||}{\log |E - E_\pm|} = -\frac{1}{2}$$

Dabei wird E aus dem Spektrum von H gewählt. Dies ist äquivalent zu:

$$\begin{gathered} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so daß für alle } |E - E_\pm| < \delta \text{ gilt} \\ \exp(-|E - E_\pm|^{-1/2+\epsilon}) \geq |N(E) - N(E_\pm)| \geq \exp(-|E - E_\pm|^{-1/2-\epsilon}) \end{gathered}$$

und impliziert:

$$|N(E) - N(E_\pm)| \leq \exp(-|E - E_\pm|^{-1/4})$$

in einer Umgebung von $E_\pm$. In der zitierten Arbeit von Mezincescu wird auch folgendes Lemma (2 in §4) bewiesen:

Lemma 6.1

Sei $H^\omega_{\Lambda_L(\tau)}$ die Einschränkung des Schrödingeroperators H^ω auf das Intervall $\Lambda_L(\tau)$ mit Dirichlet-Randbedingungen für $L \in \mathbb{N}$ und $\tau \in]-1/2, 1/2]$. Man kann τ so wählen, daß für die Integrierten Zustandsdichten $N(\cdot)$ von H, bzw. $N^\omega_L(\cdot)$ von $H^\omega_{\Lambda_L(\tau)}$ gilt:

$$\frac{N^\omega_L(E)}{L} = N(E) \tag{42}$$

für alle $E \in]E_-, E_+[$. Dabei ist τ unabhängig von ω.

Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur den oberen Rand der Lücke im Spektrum. Sei vorerst $n \in \mathbb{N}$ beliebig, später werden wir es passend zu den Vorgaben aus der Induktion in Kapitel 4 wählen (vgl. Bemerkung 4.16). Wir schätzen die Wahrscheinlichkeit ab, daß Eigenwerte von $H_{\Lambda_L(\tau)}$ im Intervall $[E_+, E_+ + 2L^{-1/n}[$ liegen. Zugute kommt uns dabei, daß man die Integrierte Zustandsdichte statt als Limes auch als Supremum schreiben kann:

$$\sup_{|\Lambda| \to \mathbb{R}} \frac{\mathbb{E}(N^\omega_\Lambda(E)\ )}{|\Lambda|} = N(E) \tag{43}$$

$N(E)$ ist also eine obere Schranke für den Quotienten auf der linken Seite für jede Größe von Λ. Vergleiche dazu [19]. Nun ergibt sich mit Lemma 6.1:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\omega|\sigma(H_{\Lambda_L(\tau)}) \cap [E_+, E_+ + 2L^{-1/n}[\neq \emptyset\} &\leq \mathbb{E}[N_L^\omega(E_+ + 2L^{-1/n}) - N_L^\omega(E_+)] \\
&\leq L[N(E_+ + 2L^{-1/n}) - N(E_+)] \\
&\leq L\exp[-(2L^{1/n})^{-1/4}] \\
&\leq L\exp[-2^{-1/4}L^{\frac{1}{4n}}] \\
&\leq L^{-p} \, ,
\end{aligned}$$

falls L hinreichend groß ist. Demnach gilt mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - L^{-p}$:

$$[E_+, E_+ + 2L^{-1/n}[\, \cap\, \sigma(H_L^\omega) = \emptyset$$

Die letzte Gleichung impliziert:

$$d(E, \sigma(H_L^\omega)) \geq L^{-1/n} \quad \forall E \in I := [E_+, E_+ + L^{-1/n}]$$

Damit haben wir uns auf das Energieintervall festgelegt, für das wir (H1) nachweisen.

Notation 6.2

Wir definieren folgende zwei Operatoren für das sogenannte Combes-Thomas Argument [8]. Sei $w \in \mathbb{C}$, i bezeichne die imaginäre Einheit und seien

$$\begin{aligned}
P_w &:= \exp(iwx) \\
Q_w &:= w^2 - 2iw\nabla
\end{aligned}$$

Operatoren auf $L^2(\Lambda_L)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad P_{-w}H_LP_w &= H_L + Q_w \text{ und} \\
P_{-w}(H_L - \lambda)^{-1}P_w &= (H_L + Q_w - \lambda)^{-1} \text{ für } \lambda \in \rho(H_L)
\end{aligned} \tag{44}$$

Um mit Hilfe der Neumannschen Reihe (vgl. [15], [26]) zu gewährleisten, daß der letzte Operator in (44) beschränkt ist, verlangen wir $||Q_w(H_L - \lambda)^{-1}|| < 1$. Daraus wird sich eine Bedingung an w ergeben. Zuerst schätzen wir

$$||\nabla(H_L - E)^{-1}|| \tag{45}$$

ab. Es gilt wegen Bemerkung 8.5 aus dem Anhang:

$$||\nabla u||_{L^p(\Lambda_L)} \leq (1 + 4C_8)||u||_{L^p(\Lambda_L)} + ||\Delta u||_{L^p(\Lambda_L)}$$

Wir beschränken uns auf den Fall $L \geq 1$, dann ist C_8 eine nichtnegative reelle Zahl. Hieraus folgt mit $u := (H_L - E)^{-1}\psi$:

$$\begin{aligned}
||\nabla(H_L - E)^{-1}\psi|| &= ||\nabla u|| \\
&\leq ||(H_L - E)u|| + (1 + |E| + ||V||_\infty + 4C_8)||u|| \\
&\leq [1 + (1 + |E| + ||V||_\infty + 4C_8)\frac{1}{d(\sigma(H_L), E)}]\ ||\psi|| \\
&\leq (1 + \frac{|E| + C_2}{d'})||\psi||
\end{aligned}$$

Dabei kürtzten wir ab: $||\cdot|| := ||\cdot||_{L^p(\Lambda_L)}$, $d' := d(\sigma(H_L), E)$ und $C_2 := 1 + ||V||_\infty + 4C_8$. Wir betrachten die ω, für welche gilt $d(\sigma(H_L), E) \geq L^{-1/n}$. Man wähle

$$|w| \leq \frac{1}{4}(1 + \frac{|E| + C_2}{L^{-1/n}})^{-1} \tag{46}$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
|w| &\leq \frac{1}{4}(1 + \frac{|E| + C_2}{d'})^{-1} \\
&\leq \frac{1}{4}\frac{d'}{d' + |E| + C_2}
\end{aligned}$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned}
||Q_w(H_L - E)^{-1}|| &\leq 2|w|\ ||\nabla(H_L - E)^{-1}|| + w^2||(H_L - E)^{-1}|| \\
&\leq \frac{1}{2}||\psi|| + \frac{1}{16}\frac{d'}{d' + |E|C_2}||\psi|| \\
&\leq \frac{3}{4}||\psi||
\end{aligned}$$

Also ist mit einem w wie in der Schranke (46) der Operator $H_L - Q_w - E$ invertierbar und es gilt:

$$||(H_L + Q_w - E)^{-1}|| \leq \frac{1}{d'}\frac{1}{1 - 3/4} \leq 4L^{1/n}$$

$$\Rightarrow\ ||P_{-w}(H_L - E)^{-1}P_w|| \leq 4L^{1/n}$$

Seien ψ und ϕ Lösungen von $(H_L - E)u = 0$. Die erste erfülle die Dirichlet-Randbedinging bei $-\frac{L}{2}$, die zweite bei $\frac{L}{2}$. Für die Greensche Funktion gilt (vgl. z.B. [6]):

$$G(x', y, E) = \frac{1}{|W|} \begin{cases} \phi(x')\psi(y) \text{ falls } x' \leq y \\ \phi(y)\psi(x') \text{ falls } y \leq x' \end{cases} \tag{47}$$

Dabei ist $W(x) := \phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x)$ die Wronski-Determinante. Sie ist konstant, d.h. unabhängig von x, weil ϕ und ψ die Gleichung $(H_L - E)u = 0$ lösen (vgl. [6]). Seien die Punkte $x', y \in \Lambda_L$ so gewählt, daß $|x' - y| > 1$ gilt. Wir definieren die Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \mathbf{1}_{B_{1/2}(x')}(z) \text{ sign}(\phi(z)) \\ \xi(v) &= \mathbf{1}_{B_{1/2}(y)}(v) \text{ sign}(\psi(v)) \quad , \end{aligned}$$

falls $x' \leq y$. Der andere Fall kann analog behandelt werden, ist aber wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion unnötig. Die Funktionen ζ, ξ sind normiert im L^2-Sinne. Es gilt:

$$\begin{aligned} 4L^{1/n} &\geq ||\zeta|| \, ||P_{-w}(H_L - E)^{-1}P_w|| \, ||\xi|| \\ &\geq \, < \zeta, P_{-w}(H_L - E)^{-1}P_w\xi > \\ &= \int \zeta(z) \, [\exp(-iwz) \int G(z, v, E) \exp(iwv)\xi(v) \, dv] \, dz \\ &= \int_{B(x')} \text{sign}(\phi(z)) \int_{B(y)} \frac{1}{|W|}\phi(z)\psi(v) \text{ sign}(\psi(v)) \exp(iw(v - z)) \, dvdz \\ &= \frac{1}{|W|} \int_{B(x')} |\phi(z)| \int_{B(y)} |\psi(v)| \exp(m'(v - z)) \, dvdz \, . \end{aligned}$$

Dabei seien $m' := -iw$, $m' \geq 0$, $B(x') := B_{1/2}(x')$, $B(y) := B_{1/2}(y)$. Es gilt $v - z \geq y - x' - 1 \geq 0$. Daher ergibt sich für die rechte Seite weiterhin die Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{|W|} \exp(m'(y - x' - 1)) \, ||\phi||_{L^1(B(x'))}||\psi||_{L^1(B(y))} \\ &\geq \frac{1}{|W|} \exp(m'(y - x' - 1))C_{10}(E)^{-2} \, ||\phi||_{\infty, B(x')}||\psi||_{\infty, B(y)} \end{aligned}$$

Die Konstante $C_{10} := C_{10}(E)$ ist dieselbe wie in Korollar 8.7 im Anhang. Uns interessiert der Fall $y \in \delta\Lambda_L(x), x' \in \Lambda_1(x)$, d.h. $y - x' \geq L/2 - 2$.

$$|G(x, y, E)| \;\leq\; \frac{1}{|W|}||\phi||_{\infty, B(x')}||\psi||_{\infty, B(y)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|W|}|W| \exp(-m'(y-x'-1))C_{10}(E)^2 4L^{1/n} \\
&\leq L^{1/n} C_{10}(E)^2 \exp(-m'(L/2-3)) \\
&\leq \exp(-m_0 L/2)
\end{aligned}
$$

Dies gilt für jedes $m_0 \in]0, m'[$, falls nur L hinreichend groß gewählt wird (in Abhängigkeit von $m', m_0, C_{10}(E), n$). Also gilt für den Exponenten in der Induktionsvoraussetzung:

$$
m_0 < m' = |w| \leq \frac{1}{4}(1 + \frac{|E| + C_2}{L^{-1/n}})^{-1} = \frac{1}{4 + 4(|E|C_2)L^{1/n}} \tag{48}
$$

Dies ist verträglich mit den Bedingungen an L und m_0, welche am Ende des Induktionsarguments (Bemerkung 4.16) auftauchen. Man wähle $n > \max(2, a(1-b))$ und danach L genügend groß in Abhängigkeit von den Parametern $|E|, ||V||_\infty, m_0, b$ und a. Die konstante C_{10} hängt monoton von dem Energiebetrag $|E|$ ab, daher reicht es, L passend für $\sup\{|E| \mid E \in I\}$ zu bestimmen. Damit haben wir die Induktionsvoraussetzung bewiesen.

7 Wegner-Abschätzung (H2)

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit kontrollieren, daß sich nahe dem betrachteten Energieintervall I Eigenwerte von H_L befinden. Im Gegensatz zu der Voraussetzung (H1) muß diese Wahrscheinlichkeit nicht nur für eine Anfangsskala L_0 klein sein, sondern für alle $L \geq L_0$. Dabei ist H_L wie gewohnt der zufällig gestörte Schrödingeroperator eingeschränkt auf ein Intervall Λ_L der Länge L.

Zuerst leiten wir eine Formel über die Ableitung der Eigenwerte einer analytischen Operatorfamilie her. Sei B eine infinitesimal beschränkte, symmetrische Störung von H_L, z.B. ein beschränktes Potential. Mit $E_n(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir den n-ten Eigenwert von $H_L + \lambda B$. Dieser ist reell analytisch in einer Umgebung von $\lambda = 0$ und es gilt $lim_{\lambda \to 0} E_n(\lambda) = E_n(0) =: E_n$ (vgl. [15]). Sei $\psi(\lambda)$ eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert $E_n(\lambda)$ Dann gilt:

$$(H_L + \lambda B)\psi(\lambda) = E_n(\lambda)\psi(\lambda) \tag{49}$$

für λ aus einer kleinen Umgebung von Null. Wir differenzieren und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}(H_L + \lambda B)\psi(\lambda) &= B\psi(\lambda) + (H_L + \lambda B)\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda) \\
\frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)\psi(\lambda) &= [\frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)]\psi(\lambda) + E_n(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda)
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$[B - \frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)]\psi(\lambda) = [E_n(\lambda) - (H_L + \lambda B)]\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda)$$

Skalare Multiplikation mit $\psi(\lambda)$ liefert:

$$\begin{aligned}
& < \psi(\lambda), [B - \frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)]\psi(\lambda) > \\
= & < \psi(\lambda), [E_n(\lambda) - (H_L + \lambda B)]\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda) > \\
= & < [E_n(\lambda) - (H_L + \lambda B)]\psi(\lambda), \frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda) > \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow < \psi(\lambda), B\psi(\lambda) >=< \psi(\lambda), [\frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)]\psi(\lambda) >= \frac{d}{d\lambda}E_n(\lambda)$$

Man darf $\psi(\lambda)$ nach λ ableiten und $\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda)$ ist in $D(H_L) \subset L^2(\Lambda_L)$ (vgl. [15]). Wir werten das Ergebnis bei $\lambda = 0$ aus und setzen $\psi := \psi(0)$.

$$< \psi, B\psi >= \frac{d}{d\lambda} E_n(\lambda)|_{\lambda=0} =: E_n'(0) \tag{50}$$

Lemma 7.1

Für jedes $h > 0$ und $E_0 \in \mathbb{R}$ existiert eien Konstante $C_7 := C_7(h, E_0) > 0$, so daß für jedes $E \in [-E_0, E_0]$ und jede Funktion ψ mit $(H - E)\psi = 0$ auf Λ_3 gilt:

$$\int_{\Lambda_3} |\psi(x)|^2 \, dx \leq C_7 \int_{\Lambda_h} |\psi(x)|^2 \, dx \tag{51}$$

Dabei ist $\Lambda_h \subset \Lambda_3$ ein Intervall der Länge h.

Beweis

Sei $y \in \mathbb{R}$ und

$$f(y) := \int_{\Lambda_h + y} |\psi(x)|^2 \, dx = ||\psi||^2_{L^2(\Lambda_h+y)} \geq 0 \tag{52}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
|\frac{d}{dy} f(y)| &= |\frac{d}{dy} \int_{\Lambda_h} \psi(x+y)\overline{\psi(x+y)} \, dx| \\
&= |\int_{\Lambda_h} [\frac{d}{dy}\psi(x+y)]\overline{\psi(x+y)} \, dx + \int_{\Lambda_h} \psi(x+y)\frac{d}{dy}\overline{\psi(x+y)} \, dx| \\
&\leq |\int_{\Lambda_h+y} \psi'(x)\overline{\psi(x)} \, dx| + |\int_{\Lambda_h+y} \psi(x)\overline{\psi'(x)} \, dx| \\
&\leq 2||\psi||_{L^2(\Lambda_h+y)}||\psi'||_{L^2(\Lambda_h+y)}
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich aus der Schwartzschen Ungleichung. Wir benutzen nun die Schranke für den Gradienten aus der Bemerkung 8.5 im Anhang:

$$||\psi'||_{L^2(\Lambda_h+y)} \leq C_9||\psi||_{L^2(\Lambda_h+y)}$$

mit $C_9 := 1 + ||V - E||_\infty + 4C_8(h)$. Damit erreichen wir:

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dy} f(y)| &\leq 2C_9 ||\psi||^2_{L^2(\Lambda_h + y)} \\ &= 2C_9 f(y) \end{aligned}$$

Aus dieser Differentialungleichung ergibt sich mit dem Lemma von Gronwall (vgl. z.B. [28]):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ f(y) &\leq \exp(2C_9|y|) f(0) \\ \Rightarrow \ ||\psi||_{L^2(\Lambda_h + y)} &\leq \exp(C_9|y|) ||\psi||_{L^2(\Lambda_h)} \\ \Rightarrow \ ||\psi||_{L^2(\Lambda_3)} &\leq (3/h + 1) \exp(3C_9) ||\psi||_{L^2(\Lambda_h)} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile schätzen wir die Anzahl der Intervalle der Länge h ab, die nötig sind, um Λ_3 zu überdecken. Damit wäre das Lemma bewiesen.
q.e.d.

Statt als Funktion von ω kann man H_L^ω auch als Funktion $H_L(t)$ von $t := \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ auffassen, wobei dann $t = t(\omega)$ wiederum von ω abhängt. Man kann dann z.B. für das Maß des Ereignisses $\{\omega |\ d(E, \sigma(H_L^\omega)) < \epsilon\}$ schreiben:

$$\mathbb{P}(\{d(E, \sigma(H_L^\omega)) < \epsilon\}) = \int \mathbf{1}_{\{t = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}} |\ d(E, \sigma(H_L(t)) < \epsilon\}} \Pi_{i \in \mathbb{Z}}\ \mu(dt_i)$$

Ebenso gilt für den Erwartungswert einer Funktion $f = f(t(\omega))$:

$$\mathbb{E}(f(t)) = \int f(t) \Pi_{i \in \mathbb{Z}}\ \mu(dt_i)$$

Unter diesem Gesichtspunkt bezeichnen wir mit $E_n^L(t)$ den n-ten Eigenwert des Operators $H_L(t)$.

Lemma 7.2

Sei $H_L := H_0 + V^\omega$ ein $\mathbb{Z}$-periodischer Schrödingeroperator mit zufälligem, beschränktem Störpotential V^ω eingeschränkt mit Dirichlet-Randbedingungen auf das Intervall Λ_L. Das Potential V^ω habe die Form wie in der Kapitel 2 beschrieben (vgl. Gleichung (5)). Insbesondere existiere für das Einzelplatzpotential $\chi \geq 0$ zum Gitterpunkt 0 aus $\mathbb{Z}$ eine offene Menge $U \subset \Lambda_1(0)$ in der gilt $\chi \geq \alpha > 0$. Dann folgt:

$$\sum_{k \in \Lambda_-} \frac{\partial E_n(t)}{\partial t_k} \geq C_4 > 0 \qquad (53)$$

Dabei ist $\Lambda_- := \{i \in \Lambda_L \cap \mathbb{Z} | \Lambda_1(i) \subset \Lambda_L\}$*. Die Konstante* C_4 *ist unabhängig von* n *und* Λ_L*.*

Beweis

Die offene Menge U enthält ein abgeschlossenes Intervall Λ_h der Länge $h > 0$. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{H} &:= H_L + \chi(\cdot - j) \\ H_L &:= H_0 + \sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i \chi(\cdot - i) \ , \end{aligned}$$

wobei $j \in \Lambda_-$ ist. Der Operator ist mit Dirichlet-Randbedingungen auf $L^2(\Lambda_L)$ restringiert. Nun wenden wir Gleichung (50) auf die Familie $\tilde{H}$ mit dem Kopplungsparameter $\tilde{t}_j$ an. ψ sei ein normierter Eigenvektor zu dem Operator H_L.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_j} E_n(t + \tilde{t}_j)|_{\tilde{t}_j = 0} &= <\psi, \chi(\cdot - j)\psi> \\ &= \int_{\Lambda_L} |\psi(x)|^2 \chi(x - j)\, dx \\ &\geq \alpha \int_{\Lambda_h + j} |\psi(x)|^2\, dx \\ &\geq \frac{\alpha}{C_7^2} ||\psi||^2_{L^2(\Lambda_3 + j)} \\ \Rightarrow \sum_{j \in \Lambda_-} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_j} E_n(t + \tilde{t}_j)|_{\tilde{t}_j = 0} &\geq \frac{\alpha}{C_7^2} \sum_{j \in \Lambda_-} \int_{\Lambda_3 + j} |\psi(x)|^2\, dx \\ &\geq \frac{\alpha}{C_7^2} \int_{\Lambda_L} |\psi(x)|^2\, dx \\ &= \frac{\alpha}{C_7^2} =: C_4 \end{aligned}$$

q.e.d.

Sei ρ eine differenzierbare Funktion, die von dem Energieparameter E abhängt. Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial \rho(E_n^L(t) - E + \theta)}{\partial t_k} = \rho'(E_n^L(t) - E + \theta) \frac{\partial E_n^L(t)}{\partial t_k}$$

Also folgt aus Lemma 7.2:

$$\begin{aligned}
\rho'(E_n^L(t) - E + \theta) &= \left(\sum_{k\in\Lambda_-} \frac{\partial E_n^L(t)}{\partial t_k}\right)^{-1} \sum_{k\in\Lambda_-} \frac{\partial \rho(E_n^L(t) - E + \theta)}{\partial t_k} \\
&\leq C_4^{-1} \sum_{k\in\Lambda_-} \frac{\partial \rho(E_n^L(t) - E + \theta)}{\partial t_k}
\end{aligned}$$

Einfachheitshalber setzen wir $C_5 := C_4^{-1} = \frac{C_7^2}{\alpha}$.

Im folgenden leiten wir ähnlich wie Kirsch in [16] die Wegner-Abschätzung (H2) ab. Sei speziell $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine montone C^∞-Funktion mit $\rho = 1$ auf $[\epsilon, \infty[$ und $\rho = 0$ auf $]-\infty, -\epsilon]$. Wie schon gesagt, schreiben wir $E_n^L(t)$ für den n-ten Eigenwert des restringierten Operators $H_L = [H_0 + \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i \chi(\cdot - i)] \mid_{\Lambda_L}$. Die Spur eines Operators bezeichnen wir mit Tr und mit $\rho(H_L)$ die Funktion ρ von dem Operator H_L gemäß dem Spektralkalkül (vgl. [26]).

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{d(E, \sigma(H_L)) < \epsilon\} \\
\leq\ & \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,,E+\epsilon]}(H_L)]\} \\
\leq\ & \mathbb{E}\{\mathrm{Tr}(\rho(H_L - E + 2\epsilon) - \rho(H_L - E + 2\epsilon))\} \\
=\ & \mathbb{E}\{\mathrm{Tr} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \rho'(H_L - E + \theta)\, d\theta\} \\
=\ & \mathbb{E}\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \rho'(E_N^L(t) - E + \theta)\, d\theta\} \\
=\ & \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \rho'(E_n^L(t) - E + \theta)\, d\theta\, \Pi_{i\in\mathbb{Z}}\, g(t_i)\, dt_i \\
\leq\ & C_5 \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \sum_{k\in\Lambda_-} \frac{\partial \rho(E_n^L(t) - E + \theta)}{\partial t_k}\, d\theta\, \Pi_{i\in\mathbb{Z}}\, g(t_i)\, dt_i \\
=\ & C_5 \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \sum_{k\in\Lambda_-} d\theta\, \Pi_{i\in\mathbb{Z}}\, g(t_i)\, dt_i \int \frac{\partial \rho(E_n^L(t) - E + \theta)}{\partial t_k}\, g(t_k)\, dt_k \\
\leq\ & C_5 ||g||_\infty \sum_{k\in\Lambda_-} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} d\theta \int \Pi_{i\in\mathbb{Z}, i\neq k}\, g(t_i)\, dt_i \times \\
& \sum_{n\in\mathbb{N}} (\rho(E_n^L(t, t_k = \max) - E + \theta) - \rho(E_n^L(t, t_k = \min) - E + \theta))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C_5||g||_\infty \sum_{k\in\Lambda_-} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} d\theta \int \Pi_{i\in\mathbb{Z},i\neq k}\, g(t_i)\, dt_i \;\times \\
&\quad \#\{n\in\mathbb{N}|E_n^L(t,t_k=\max) > E-\theta-\epsilon, E_n^L(t,t_k=\min) < E-\theta+\epsilon\} \\
&\le C_5||g||_\infty \sum_{k\in\Lambda_-} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \int \Pi_{i\in\mathbb{Z},i\neq k}\, g(t_i)\, dt_i\, d\theta\ \#\{n\in\mathbb{N}|E_n^L(t,t_k=\min) < E+2\epsilon\} \\
&\le C_5||g||_\infty \sum_{k\in\Lambda_-} \int_{-2\epsilon}^{2\epsilon} \int \Pi_{i\in\mathbb{Z},i\neq k}\, g(t_i)\, dt_i\, d\theta \frac{L}{\pi}\sqrt{E+2\epsilon+||V||_\infty}
\end{aligned}
$$

Dabei verwendeten wir für die Anzahl der Eigenwerte die Abschätzung aus Lemma 4.10. Die Bezeichnung $t, t_k = \max$ steht für den Vektor $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ mit der k-ten Komponente $t_k = \sup($ Träger von $g)$. Weiter folgt für die rechte Seite, falls $\epsilon \le 1$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\le C_5||g||_\infty L\ 4\epsilon \frac{L}{\pi}\sqrt{E+2+||V||_\infty} \\
&\le C_6||g||_\infty \epsilon L^2
\end{aligned}
$$

Die Konstante C_6 hängt von $||V||_\infty$, sowie stetig und monoton wachsend von E ab. Falls wir $\epsilon := \exp(-L^b)$ wählen, ergibt sich die Wegner-Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{d(E,\sigma(H_L)) < \exp(-L^b)\} &\le C_6||g||_\infty \exp(-L^b)L^2 \\
&\le L^{-q}
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung gilt für hinreichend großes L, abhängig von $||g||_\infty$, b, q, E und $||V||_\infty$.

8 Anhang (Einiges über Sobolevräume)

L^2-Funktionen, die Elemente eines Sobolevraumes sind, zeichnen sich durch gewisse Regularitätseigenschaften aus. In diesem Abschnitt haben wir Abschätzungen für die Supremumsnorm und den Gradienten von Funktionen aus W_p^2 zusammengestellt. Da wir in dieser Arbeit nur beschränkte Potentiale betrachten, gilt für den Definitionsbereich des Schrödingeroperators $D(H) = D(-\Delta) = W_2^2(\mathbb{R})$. Insbesondere gelten für Eigenfunktionen von H die folgenden Abschätzungen und implizieren für diese Funktionen einige Verschärfungen.

Der Sobolevraum $W_p^2(\Lambda_L)$ besteht aus L^p-integrierbaren Funktionen

$$u \; : \; \Lambda_L \; \rightarrow \; \mathbb{C}$$

deren zweite Ableitung im Distributionensinne auch L^p-integrierbar ist. Dieselbe Eigenschaft folgt dann auch für die erste (schwache) Ableitung. Man definiert die Norm

$$||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} := \sum_{j=0,1,2} ||(u)^j||_{L^p(\Lambda_L)}$$

und damit den Sobolevraum

$$W_p^2(\Lambda_L) := \{u \in L^p(\Lambda_L) | \; ||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} < \infty\}$$

Für ein beliebiges Intervall $\Lambda_L(x)$ ist die Definition analog wie bei $\Lambda_L := \Lambda_L(0)$. Entsprechend definiert man auch den etwas größeren ‚ersten' Sobolevraum $W_p^1(\Lambda_L)$, in dessen Norm nur bis zur ersten Ableitung summiert wird.

Als technisches Hilfsmittel wird ein Erweiterungsoperator $\mathcal{E}$ konstruiert, der einer Funktion u auf einem Intervall eine andere $\mathcal{E}u$ zuordnet, welche der auf ganzen reellen Achse definiert ist. Auf dem Definitionsbereich von u gilt dabei $\mathcal{E}u = u$, daher der Name des Operators.

Proposition 8.1

Es existiert ein linearer, beschränkter Erweiterungsoperator

$$\mathcal{E} \; : \; W_p^2(\Lambda_L) \; \rightarrow \; W_p^2(\mathbb{R}) \tag{54}$$

Genauer gesagt, es gilt für alle $u \in W_p^2(\Lambda_L)$ mit einer Konstante $C_{12}(L)$:

$$||\mathcal{E}u||_{W_p^2(\mathbb{R})} \leq C_{12}||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} \tag{55}$$

Dabei hängt C_{12} nicht von L ab, falls man sich auf $L \geq 1$ beschränkt.

Beweis

Der Beweis setzt sich aus zwei Schritten zusammen.

(1.) Wir konstruieren einen linearen, beschränkten Erweiterungsoperator $\mathcal{E}_0$ von $W_p^2(\mathbb{R}_+)$ nach $W_p^2(\mathbb{R})$. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Die Funktion $\mathcal{E}_0 u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{E}_0 u(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0 \\ 6u(-x) - 32u(-x/2) + 27u(-x/3) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Man weist leicht nach, daß $\mathcal{E}_0 u$ wohldefiniert ist in $x = 0$ und zweimal stetig ableitbar auf ganz $\mathbb{R}$. Falls wir zusätzlich $u \in W_p^2(\mathbb{R}_+)$ voraussetzen, kann man die Sobolevnorm von $\mathcal{E}_0 u$ abschätzen:

$$\begin{aligned} ||\mathcal{E}_0 u||_{W_p^2(\mathbb{R})} &\leq ||\mathcal{E}_0 u||_{W_p^2(\mathbb{R}_-)} + ||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq 6||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)} + 32(2||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)}) + 27(3||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)}) + ||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= 152||u||_{W_p^2(\mathbb{R}_+)} \end{aligned}$$

Da C^2 dicht liegt in W_p^2 (vgl. [12]), läßt sich der soeben definierte Erweiterungsoperator

$$\mathcal{E}_0 : \ C^2(\mathbb{R}_+) \cap W_p^2(\mathbb{R}_+) \ \to \ W_p^2(\mathbb{R})$$

mit derselben Norm linear auf ganz $W_p^2(\mathbb{R}_+)$ fortsetzen.

(2.) Nun konstruieren wir aus $\mathcal{E}_0$ einen Erweiterungsoperator

$$\mathcal{E} : \ W_p^2(\Lambda_L) \ \to \ W_p^2(\mathbb{R}) \tag{56}$$

Sei $L \geq 1$ und seien

$$\begin{aligned} \Theta_1 &:= [-L/2, -L/2 + 1[\\ \Theta_2 &:=]L/2 - 1, L/2] \\ \Theta_0 &:=] - L/2 + 1/2, L/2 - 1/2[= \Lambda_{L-1} \end{aligned}$$

Dann ist $\{\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2\}$ eine Überdeckung von Λ_L. Sei $\{\eta_0^L, \eta_1^L, \eta_2^L\}$ eine zugehörige Partition der Eins, d.h. $\eta_i^L \in C_0^\infty(\Theta_i)$, $\eta_i^L \geq 0$ für alle $i = 0, 1, 2$ und $\sum_{i=0}^2 \eta_i^L(x) = 1$ für alle $x \in \Lambda_L$.

Zusätzlich wählen wir die η_i^L so, daß gilt:

(α) $\eta_1^L(x) = -\eta_2^L(-x)$ für alle $x \in \Theta_1 = -\Theta_2$

(β) für zwei verschieden große Intervalle Λ_L, Λ_l haben wir:
für alle $x \in [-L/2, -L/2+1[$ gilt $\eta_1^L(x) = \eta_1^l(x + L/2 - l/2)$
für alle $x \in]L/2-1, L/2]$ gilt $\eta_2^L(x) = \eta_2^l(x - L/2 + l/2)$

Es gilt $\eta_0^L = 1 - \eta_1^L - \eta_2^L$, d.h. η_0^L ist schon eindeutig bestimmt. Wir definieren für $i = 1, 2$

$$\kappa_j := \max_{\Lambda_L} |(\eta_i^L)^{(j)}| \quad j = 0, 1, 2$$

κ_j ist unabhängig von i wegen (α) (Spiegelsymmetrie) und von $L \geq 1$ wegen (β) (Wertebereich von η_i^L hängt nicht von der Intervallänge ab.).

Sei nun $u \in W_p^2(\Lambda_L)$, dann ist $u\eta_i^L$ im selben Raum enthalten für $i = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; u\eta_1^L &\in W_p^2(\mathbb{R}_+ - L/2) \\ u\eta_2^L &\in W_p^2(\mathbb{R}_- + L/2) \end{aligned}$$

Wenden wir nun den ersten Teil des Beweises - nach einer Translation und gegebenfalls einer Spiegelung - auf diese beiden Funktionen an. Es gilt

$$\mathcal{E}_0(u\eta_1^L), \mathcal{E}_0(u\eta_i^L) \in W_p^2(\mathbb{R})$$

mit den folgenden Schranken für die Norm der beiden Funktionen:

$$||\mathcal{E}_0(u\eta_i^L)||_{W_p^2(\mathbb{R})} \leq 152||u\eta_i^L||_{W_p^2(\Lambda_L)} \text{ für } i = 1, 2$$

Nach all diesen Vorbereitungen, können wir den angekündigten Erweiterungsoperator $\mathcal{E} : W_p^2(\Lambda_L) \rightarrow W_p^2(\mathbb{R})$ hinschreiben:

$$\mathcal{E}u := u\eta_0^L + \mathcal{E}_0(u\eta_1^L) + \mathcal{E}_0(u\eta_2^L) \tag{57}$$

Wegen der Produktregel für die Ableitung gilt für $i = 1$ oder 2:

$$\begin{aligned} ||u\eta_i^L||_{W_p^2(\Lambda_L)} &= \sum_{j=0}^{2} ||(u\eta_i^L)^{(j)}||_{L^p(\Lambda_L)} \\ &\leq (\kappa_0 + 2\kappa_1 + \kappa_2)||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} \end{aligned}$$

Damit folgt für die Norm des Erweiterungsoperators $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}
||\mathcal{E}u||_{W_p^2(\mathbb{R})} &\leq ||\mathbf{1}_{\Lambda_L}\mathcal{E}u||_{W_p^2(\mathbb{R})} + ||\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\Lambda_L}\mathcal{E}u||_{W_p^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} + ||\mathcal{E}_0(u\eta_1^L)||_{W_p^2(\mathbb{R})} + ||\mathcal{E}_0(u\eta_2^L)||_{W_p^2(\mathbb{R})} \\
&\leq ||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} + 152\,(||u\eta_1^L||_{W_p^2(\Lambda_L)} + ||u\eta_2^L||_{W_p^2(\Lambda_L)}) \\
&\leq (1 + 304(\kappa_0 + 2\kappa_1 + \kappa_2))||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} \\
&\leq C_{12}||u||_{W_p^2(\Lambda_L)}
\end{aligned}$$

Aus der Formel (57) ist ersichtlich, daß $\mathcal{E}$ wirkich die Funktion u unverändert läßt auf ihrem ursprünglichem Definitionsbereich. Falls man $L < 1$ zuließe, hinge die Konstante C_{12} noch von diesem Parameter ab, aber in unserem Fall ist sie fest.
q.e.d.

Bemerkung 8.2

(1.) Proposition 8.1 ahmt den Beweis des Theorems 7.25 in [12] nach. Dort ist eine ähnliche Aussage für genügend reguläre Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gezeigt, allerdings sieht man nicht explizit, wie die Norm des Erweiterungsoperators von der Größe des Definitionsbereichs Ω abhängt.

(2.) Wie man sich leicht überlegt, ist der Erweiterungsoperator auch in der L^p-Norm beschränkt.

Nun zitieren wir noch eine passende Version eines Satzes aus [12] (Theorem 7.27) zur Gradientenabschätzung von Sobolevfunktionen.

Proposition 8.3
Sei $u \in W_p^2(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$||u'||_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon||u||_{W_p^2(\mathbb{R})} + \frac{C_{13}}{\epsilon}\,||u||_{L^p(\mathbb{R})} \tag{58}$$

Wir verallgemeinern diese Schranke für den Gradienten auf den Fall, wo der Definitionsbereich der Funktion u ein Intervall ist.

Proposition 8.4

Sei $u \in W_p^2(\Lambda_L)$, dann gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$||u'||_{L^p(\Lambda_L)} \leq \epsilon\, ||u||_{W_p^2(\Lambda_L)} + \frac{C_8(L)}{\epsilon}\, ||u||_{L^p(\Lambda_L)} \tag{59}$$

Die Konstante C_8 hängt nur von L ab. Falls das betrachtete Intervall Λ_L die Länge $L \geq 1$ hat, kann man $C_8(L) := C_8(1)$ wählen.

Beweis

Es gilt mit den Bezeichnungen aus den letzten beiden Propositionen:

$$\begin{aligned} ||u'||_{L^p(\Lambda_L)} &\leq ||(\mathcal{E}u)'||_{L^p(\Lambda_L)} \\ &\leq \epsilon||\mathcal{E}u||_{W_p^2(\mathbb{R})} + \frac{C_{13}}{\epsilon}||\mathcal{E}u||_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq C_{12}\, \epsilon||u||_{L^p(\Lambda_L)} + \frac{C_{12}C_{13}}{\epsilon}||u||_{L^p(\Lambda_L)} \end{aligned}$$

Falls man ϵ umskaliert, erhält man die Aussage der Proposition.
q.e.d.

Bemerkung 8.5

Für eine Lösung der Gleichung $(-\Delta + V - E)u = 0$ folgt, wenn wir $\epsilon = 1/2$ setzen:

$$\begin{aligned} & ||u'||_{L^p(\Lambda_L)} &\leq\ & 1/2(\, ||u||_{L^p(\Lambda_L)} + \, ||u'||_{L^p(\Lambda_L)} + \, ||u''||_{L^p(\Lambda_L)}) + 2C_8(L)\, ||u||_{L^p(\Lambda_L)} \\ \Rightarrow\ & ||u'||_{L^p(\Lambda_L)} &\leq\ & ||u''||_{L^p(\Lambda_L)} + (1 + 4C_8(L))\, ||u||_{L^p(\Lambda_L)} \\ & &\leq\ & (1 + \, ||V - E||_\infty + 4C_8(L))\, ||u||_{L^p(\Lambda_L)} \end{aligned}$$

Lemma 8.6

Sei $u \in W_1^2(\Lambda_L)$, dann gilt

$$||u||_\infty \leq 2\, ||u''||_{L^1} + (1/L + 2 + 8C_8)\, ||u||_{L^1}\ , \tag{60}$$

wobei C_8 wie in der vorhergehenden Proposition ist und die Normen auf dem Intervall Λ_L genommen werden.

Ein Teil des Beweises von Lemma 8.6 ist der Kurseinheit 6 von [2] entnommen. Die Aussage gilt insbesondere für alle $u \in W_2^2(\Lambda_L) \subset W_1^2(\Lambda_L)$.

Beweis

Sei $v \in W_2^1(\Lambda_L) \subset W_1^1(\Lambda_L)$. Dann existiert ein Repräsentant $u \in C(\Lambda_L)$ von v und es gilt:

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v'(z)\, dz \tag{61}$$

für alle x, y aus Λ_L .

In der Tat, sei $u_1 := \int_{x_0}^x v'(z)\, dz$ für ein $x_0 \in \Lambda_L$. Da v' auf Λ_L integrierbar ist, muß u_1 auf diesem Intervall stetig sein. Im Distributionensinne haben v und u_1 dieselbe Ableitung. Aus

$$\frac{du_1}{dx} - \frac{dv}{dx} = 0$$

folgt $u_1 - v =$ const. fast überall. Mann setzt $u := u_1 -$ const. und bekommt die Gleichungskette:

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= u_1(x) - u_1(y) \\ &= \int_{x_0}^x v'(z)\, dz - \int_{x_0}^y v'(z)\, dz \\ &= \int_y^x v'(z)\, dz \end{aligned}$$

Diese Formel wird bei den folgenden Ungleichungen verwendet. Einfachheitshalber setzen wir $\Lambda_L = [a, b]$.

$$\begin{aligned} |u(x) - u(a)| &= |\int_a^x u'(z)\, dz| \\ &\leq \int_a^x |u'(z)|\, dz \\ &\leq ||u'||_{L^1([a,b])} \end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x) - u(a)|\, dx &\leq \int_a^b ||u'||_{L^1([a,b])}\, dx \\ &\leq (b - a)\, ||u'||_{L^1([a,b])} \\ &= L\, ||u'||_{L^1(\Lambda_L)} \end{aligned}$$

Ebenfalls gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b |u(x)-u(a)|\,dx &\geq \int_a^b (|u(a)|-|u(x)|)\,dx \\ &= (b-a)|u(a)| - \int_a^b |u(x)|\,dx \\ &= L|u(a)| - \,||u||_{L^1(\Lambda_L)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ L\,|u(a)| &\leq ||u||_{L^1(\Lambda_L)} + L\,||u'||_{L^1(\Lambda_L)} \\ \Rightarrow\ |u(a)| &\leq ||u'||_{L^1(\Lambda)} + \frac{1}{L}\,||u||_{L^1(\Lambda_L)} \\ \Rightarrow\ |u(x)| &\leq |u(a)| + |u(x)-u(a)| \\ &\leq 2\,||u'||_{L^1(\Lambda_L)} + \frac{1}{L}\,||u||_{L^1(\Lambda_L)}\end{aligned}$$

Nun verwenden wir Proposition 8.1 mit $\epsilon = 1/2$:

$$||u'||_{L^1(\Lambda_L)} \leq \frac{1}{2}\,||u||_{W_1^2(\Lambda_L)} + 2C_8(L)\,||u||_{L^1(\Lambda_L)}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}(1-1/2)\,||u'||_{L^1(\Lambda_L)} &\leq 1/2\,(\,||u||_{L^1(\Lambda_L)} + \,||u''||_{L^1(\Lambda_L)}) + 2C_8(L)\,||u||_{L^1(\Lambda_L)} \\ \Rightarrow\ ||u'||_{L^1(\Lambda_L)} &\leq ||u''||_{L^1(\Lambda_L)} + (1+4C_8(L))\,||u||_{L^1(\Lambda_L)}\end{aligned}$$

Mit der vorherigen Abschätzung für $|u(x)|$ folgt:

$$\begin{aligned}||u||_\infty &\leq 2\,(\,||u''||_{L^1(\Lambda_L)} + (1+4C_8(L))\,||u||_{L^1(\Lambda_L)}) + \frac{1}{L}\,||u||_{L^1(\Lambda_L)} \\ &= 2\,||u''||_{L^1(\Lambda_L)} + (\frac{1}{L} + 2 + 8C_8(L))\,||u||_{L^1(\Lambda_L)}\end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 8.7

Falls die Funktion u Lösung der Gleichung $(-\Delta + V - E)u = 0$ *auf dem Intervall* Λ_L *ist, gilt:*

$$||u||_\infty \leq C_{10}\,||u||_{L^1(\Lambda_L)} \tag{62}$$

mit

$$C_{10} := (1/L + 2 + 8C_8(L) + 2|E| + 2||V||_\infty)$$

Beweis

Nach Voraussetzung erfüllt u

$$-\Delta u + Vu = Eu \;\Rightarrow\; u'' = (V-E)u$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} ||u||_\infty &\leq 2(\,||V-E||_\infty \,||u||_{L^1}) + (1/L + 2 + 8C_8(L))\,||u||_{L^1} \\ &= (1/L + 2 + 8C_8(L) + 2\,||V||_\infty + 2|E|)\;||u||_{L^1} \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 8.8

Seien $(z,y) \in \Lambda_L \setminus \delta$. Dann gilt für die Resolvente $R := R_L(E)$ und deren Integralkern $G = G_L$:

$$|G(z,y)| \leq C_{11}^2 ||R\,||\,, \tag{63}$$

wobei $C_{11} := (3 + 8C_8(1) + 2|E| + 2||V||_\infty)$ ist.

Beweis

Wir wählen zwei Punkte $(x,y) \in \Lambda_L \setminus \delta$. Ohne Einschränkung sei $x \leq y$. Es existieren disjunkte, abgeschlossene Einheitsintervalle $S, T \subset \Lambda_L$, von denen das erste x und das zweite y enthält. Ein Ausnahme bildet der Fall $x = y$; dann haben die Intervalle S und T genau einen Punkt gemeinsam, nämlich $x = y$. Es gilt: $z \leq v$ für alle $z \in S$ und $v \in T$.

Wie im Kapitel 6 benutzen wir die Darstellung der Greenschen Funktion als Produkt von zwei Lösungen ϕ, ψ der zugehörigen Differentialgleichung. In Gleichung (47) und dem umgebenden Text ist dies genauer erklärt. Wieder definieren wir:

$$\begin{aligned} \zeta(z) &:= \mathbf{1}_S(z)\,\mathrm{sign}(\phi(z)) \\ \xi(v) &:= \mathbf{1}_T(v)\,\mathrm{sign}(\psi(v)) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt: $||\zeta||_{L^1} = ||\xi||_{L^1} = 1$. Man erhält mit der Cauchy-Ungleichung:

$$||R\,|| \;=\; ||\xi\,||\;\,||R\,||\;\,||\zeta||$$

$$
\begin{aligned}
&\geq |<\xi, R\zeta>| \\
&= |\int_{\Lambda_L} \xi(z) R\zeta(z)\, dz| \\
&= \int_{\Lambda_L} \xi(z) \int_{\Lambda_L} G(z,v)\zeta(v)\, dv\, dz \\
&= \frac{1}{|W|} |\int_S \text{sign}\phi(z) \int_T \phi(z)\psi(v)\ \text{sign}\psi(v)\, dv\, dz| \\
&= \frac{1}{|W|} \int_S |\phi(z)|\, dz \int_T |\psi(v)|\, dv \\
&= \frac{1}{|W|}\, ||\phi||_{L^1(S)}\, ||\psi||_{L^1(T)}
\end{aligned}
$$

Dabei benutzten wir, daß wegen der Anordnung der Intervalle S und T stets $z \leq v$ gilt. Das vorangehende Korollar liefert die weitere Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
|G(x,y)| &\leq \frac{1}{|W|}\, ||\phi||_{\infty,S}\, ||\psi||_{\infty,T} \\
&\leq \frac{1}{|W|} C_{11}\, ||\phi||_{L^1(S)} C_{11}\, ||\psi||_{L^1(T)} \\
&\leq C_{11}^2 ||R||
\end{aligned}
$$

Die Konstante C_{11} ergibt sich, indem man in C_{10} die Länge $L = 1$ einsetzt. Für die Argumente muß wieder gelten $(x,y) \in \Lambda_L \setminus \delta$.
q.e.d.

Literatur

[1] I. Aganović, K. Veselić: Gleichungen der Mathematischen Physik (kroatisch), Školska Knjiga, Zagreb (1985)

[2] I. Aganović, K. Veselić: Einführung in die partiellen Differentialgleichungen II, Fernkurs, Feruniversität Hagen (1995)

[3] Ph. Anderson: Absences of diffusion in certain random lattices, Physical Review 109, 1492-1505 (1958)

[4] J.M. Barbaroux, J.M. Combes, P.D. Hislop: Localisation near band edges for random Schrödinger operators, Preprint

[5] J.M. Berezanski: Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Transl. Math. Monographs 17 , American Mathematical Soc., Providence (1968)

[6] R. Carmona, J. Lacroix: Spectral theory of random Schrödinger operators, Birkhäuser, Berlin (1990)

[7] J.M. Combes, P.D. Hislop: Localisation for some continuous, random Hamiltonians in d-dimensions, J. Funct. Anal. 124 (1994)

[8] J.M. Combes, L. Thomas: Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators, Commun. Math. Phys. 34

[9] H. von Dreifus, A. Klein: A new proof of Localisation in the Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys. 124 (1989)

[10] O. Forster: Analysis 1, 2, 3, Vieweg Verlag, Braunschweig (1983, 1984, 1984)

[11] J. Fröhlich, T. Spencer: Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy, Commun. Math. Phys. 88, 151-184, (1983)

[12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2. Auflage), Springer-Verlag, Berlin (1983)

[13] I. Ja. Goldsheid, S. A. Molcanov, L. A. Pastur: Pure point spectrum of stochastic one dimensional Schrödinger operators, Funct. Anal. Appl. 11, 1-10 (1977)

[14] H. Holden, F. Martinelli: On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, Commun. Math. Phys. 93, 197-217 (1984)

[15] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators (2. Auflage), Springer-Verlag; Berlin (1980)

[16] W. Kirsch: Wegner estimates and Anderson localisation for alloy-type potentials, Math. Z. 221, 501-512 (1996)

[17] W. Kirsch: Random Schrödinger Operators, in: Schrödinger operators LNP 345, pp. 264-371, (H.Holden, A. Jensen, (eds.)), Proceedings, Sonderborg, Dänemark 1988, Springer-Verlag, Berlin

[18] W. Kirsch, F. Martinelli: On the ergodic properties of the spectrum of general random operators, J. Reine Angew. Math. 334, 141-156 (1982)

[19] W. Kirsch, F. Martinelli: On the density of states of Schrödinger operators with random potential, J. Phys. A15, 2139-2156 (1982)

[20] W. Kirsch, S.A. Molchanov, L.A. Pastur: One dimensional Schrödinger operators with high poential barriers, Operator Theory: Adv. and Appl., 57, 163-170 (1992)

[21] F. Klopp: Localisation pour des operateurs de Schrödinger aleatoires dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: un modele semi-classique, Preprint series of the Mittag-Leffler Institute, report No. 1 (1992)

[22] F. Klopp: Localisation for some continuous random Schrödinger operators, Commun. Math. Phys. 167, 553-569 (1995)

[23] H. Kunz, B. Souillard: Sur le spectre des operateurs aux differences finies aleatoires, Commun. Math. Phys. 78, 201-246 (1980)

[24] G.A. Mezincescu: Internal Lifschitz singularities for one dimensional Schrödinger operators, Commun. Math. Phys. 158, 315-325 (1993)

[25] L. A. Pastur: Spectral properties of disorderd systems in one-body approximation, Commun. Math. Phys. 75, 179 (1980)

[26] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, Band IV, Academic Press, New York (1978)

[27] B. Simon: Schrödinger Semigroups, Bull. Am. Math. Soc. 7, 447-526 (1983)

[28] W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Auflage, Springer, Berlin (1976)

[29] F. Wegner: Bounds on the density of states in disorderd systems, Z. Physik B44, 9-15 (1981)