

**Aufgabe 1 (x Punkte)**

In dieser Aufgabe werden Behauptungen aufgestellt, die entweder wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie nur die Behauptungen an, die Sie für wahr halten.

Punktevergabe: Für jedes richtig gesetzte Kreuz gibt es einen Punkt, egal ob alle richtigen Aussagen angekreuzt sind oder nicht. Ist jedoch eine falsche Behauptung angekreuzt, so erhalten Sie in dieser Aufgabe 0 Punkte! Kreuzen Sie also eine Behauptung nur an, wenn Sie sich sicher sind, dass sie richtig ist.

Für  $a < b$  sei  $f \in C[a, b]$ . Weiter sei  $p_n \in \mathcal{P}_n$  mit  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  das Interpolationspolynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  an  $f$  in den Knoten  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, \dots, n$ , mit  $h = \frac{b-a}{n}$ .

- |  | wahr                     |
|--|--------------------------|
| • $a_n = f[x_0, \dots, x_n]$   | <input type="checkbox"/> |
| • $a_0 = f[x_0]$   | <input type="checkbox"/> |
| • $\lim_{n \rightarrow \infty}  f(x) - p_n(x)  = 0$ für $x \in [a, b]$ | <input type="checkbox"/> |
| • Für $f \in \mathcal{P}_n$ gilt $f = p_n$                             | <input type="checkbox"/> |
| • Die Newton-Grundpolynome erfüllen $N_k(x_j) = \delta_{j,k}$          | <input type="checkbox"/> |

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**

In dieser Aufgabe sind nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Felder einzutragen. Die Lösungswege sind unerheblich.

Punktevergabe: Jede Teilaufgabe gibt zwei Punkte. Falsche Antworten geben keine Abzüge.

a) Die Nullstellen des Legendre-Polynoms  $L_3$  lauten \_\_\_\_\_.

b) Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

gilt  $\text{cond}_\infty(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

c) Eine  $LR$ -Zerlegung  $PA = LR$  der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

lautet

$P = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $L = \underline{\hspace{2cm}}$  und  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Aufgabe 3 (7 Punkte)**

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  eine positiv definite Matrix mit den Eigenwerten 10, 5, 3 und 2.

- Geben Sie die Spektralnormen  $\|A\|_2$  und  $\|A^{-1}\|_2$  an.
- Was liefert der Störungssatz zur Lösung von  $Ax = b$ ,  $b \in \mathbb{R}^4$ , wenn  $\|b\|_2 = 1$ ,  $\Delta_b \in \mathbb{R}^4$ , sowie  $\Delta_A = 0$  gilt?
- Sei weiterhin  $\Delta_A = 0$ . Geben Sie mit Hilfe der Eigenvektoren von  $A$  Vektoren  $b$  und  $\Delta_b$  so an, dass Gleichheit im Störungssatz gilt.

**Aufgabe 4 (8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = (1 + 2x)^{-1}$ ,  $x \in [0, \frac{3}{2}]$ .

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $p_3 \in \mathcal{P}_3$  in Newton-Form zu den Knoten  $x_k = \frac{k}{2}$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.
- Erweitern Sie das Schema um den Knoten  $x_4 = \frac{1}{4}$  und bestimmen Sie anschließend den Interpolationsfehler in Newton-Form durch das Polynom  $p_3$  aus a) an der Stelle  $x_4$ .

**Aufgabe 5 (8 Punkte)**

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & -3 \\ -12 & 17 & 1 \\ -3 & 1 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung  $A = LL^T$ .
  - Begründen Sie, dass die Matrix  $A$  positiv definit ist.
  - Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrix  $L$  aus Teil a) die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.
-

**Aufgabe 6 (Bonusaufgabe)**

Gegeben ist der folgende Octave/Matlab-Code:

```
1 function S = myalg(A)
2 % MYALG macht irgend etwas
3 % S = myalg(A)
4 % -----
5 % INPUT
6 % A      - ???
7 % OUTPUT
8 % S      - ???
9 % -----
10 % Beispiel: A = randn(5,3); S = myalg(A'*A);
11
12 [m,n]=size(A);
13
14 S=zeros(n,n);
15
16 for k=1:n
17     g=A(k,k) - S(k,1:(k-1)) * S(k,1:(k-1))';
18
19     S(k,k)=sqrt(g);
20
21     S((k+1):n,k)=1/S(k,k)*(A((k+1):n,k)-S((k+1):n,1:(k-1))*S(k,1:(k-1))');
22 end
```

- Welches Ihnen bekannte Verfahren wird durch den Algorithmus umgesetzt?
  - Schreiben Sie zwei Abfragen, die die positive Definitheit und die numerische Invertierbarkeit der Matrix  $A$  sinnvoll überprüfen. Geben Sie jeweils die Zeilen an, in denen Sie Änderungen vornehmen.
  - Welches Ergebnis erwarten Sie, wenn Sie `myalg(hilb(20))` aufrufen?
-