Aufgabe 1 (5 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei Blöcken. In jedem Block werden Behauptungen aufgestellt, die entweder wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie nur die Behauptungen an, die Sie für wahr halten.

Punktevergabe: Für jedes richtig gesetzte Kreuz gibt es einen Punkt, egal ob alle richtigen Aussagen angekreuzt sind oder nicht. Ist in einem Block jedoch eine falsche Behauptung angekreuzt, so gibt es in diesem Block 0 Punkte! Kreuzen Sie also eine Behauptung nur an, wenn Sie sich sicher sind, dass sie richtig ist.

Block 1:

Für $a < b$ sei $f \in C^1[a,b]$. Weiter sei $p_n \in \mathcal{P}_n$ mit $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$ das Interpolationspolynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ in Newton-Form an f in den Knoten $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$.

wahr

- $a_0 = f[x_0]$ ☐
- $a_n = f[x_n]$ ☐
- $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = p_n'(a)$ ☐
- $N_k(x_0) = \delta_{k,0}$ für $k = 0, \ldots, n$ ☐
- $f[x_0, x_1] = p_n[x_0, x_1]$ ☐

Block 2:

Für $m \geq n$ sei $A = (a_{k,\ell}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ und Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$.

wahr

- $\|A\|_F = \|\Sigma\|_F$ ☐
- $\text{Rang}(A) = \max\{\text{Rang}(U), \text{Rang}(\Sigma), \text{Rang}(V)\}$ ☐
- λ Eigenwert von $A^TA \quad \Rightarrow \quad$ es ex. Singulärwert σ_j mit $\lambda = \sigma_j$ ☐
- $\max\limits_j\{\sigma_j\} = \max\limits_{k,\ell}\{a_{k,\ell}\}$ ☐
- $\Sigma = I \quad \Rightarrow \quad A$ orthogonal ☐

Aufgabe 2 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe sind nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Felder einzutragen. Die Lösungswege sind unerheblich.

Punktevergabe: Jede Teilaufgabe gibt zwei Punkte. Falsche Antworten geben keine Abzüge.

a) Eine LR-Zerlegung $PA = LR$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

lautet

$P =$ ________________, $L =$ ________________ und $R =$ ________________.

b) Die Auswertung der Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^{-1}$ besitzt die Konditionszahl

$$k(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

c) Gegeben seien $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos(\pi x)$ und die Knoten $x_k = k$, $k = 0, 1, 2$. Dann gilt

$$f[x_0, x_1, x_2] = \_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

d) Eine Householder-Matrix $H \in O(n)$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 =$ ______ und $\lambda_2 =$ ______

mit den Vielfachheiten $\mu_1 =$ ______ (von λ_1) und $\mu_2 =$ ______ (von λ_2).

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 2$.

a) Bestimmen Sie die Iterationsfunktion g des Newton-Verfahrens und die Iterierten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ zum Startwert $x^{(0)} = 2$.

b) Zeigen Sie, dass g auf $I = [1, 2]$ eine kontrahierende Selbstabbildung darstellt.

c) $x^* = \sqrt[3]{2}$ ist der eindeutige Fixpunkt von g in I. Was liefert die a posteriori-Fehlerabschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes für $|x^{(2)} - x^*|$?

d) Bestimmen Sie die Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens.

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_2$ mit $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = x^2$ sowie die Funktion $h \in C[0, 1]$ mit $h(x) = e^x$ für $x \in [0, 1]$.

a) Orthonormieren Sie die Funktionen f_1, f_2 bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\,.$$

b) Berechnen Sie die Gauß-Approximation $p \in \operatorname{span}\{f_1, f_2\}$ an die Funktion h mittels der in a) berechneten ONB. Die Verwendung anderer Basen ist nicht gestattet.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Von den Messdaten

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0	3	4	5	6	7	8	9	12
y_k	-1	2	-2	3	1	0	-1	3	-2

sei bekannt, dass ihnen ein Zusammenhang der Form $y = c_0 + c_1 \cos(\frac{\pi}{2}x)$ zu Grunde liegt.

a) Berechnen Sie die Werte $\cos(\frac{\pi}{2}x_k)$, $k = 0, \ldots, 8$, und stellen Sie die zugehörige Normalengleichung zur Bestimmung von c_0 und c_1 auf.

b) Lösen Sie die Normalengleichung mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung. (Andere Lösungswege sind nicht gestattet!)

c) Skizzieren Sie die Ausgleichsfunktion und die Daten in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgabe 6 (7 Punkte)
Betrachten Sie die Quadraturformel

$$J_1(f) := w_0 f(-1) + w_1 f(x_1) \quad \approx \quad \int_{-1}^{1} f(t)\,dt\,.$$

a) Bestimmen Sie den Knoten x_1 und die Gewichte w_0, w_1 aus den Exaktheitsbedingungen für quadratische Polynome.

b) Bestimmen Sie den maximalen Exaktheitsgrad von J_1.

c) Wie lautet die entsprechende Formel für das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$?

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Es sei

$$V \quad = \quad \{s \in C^2[0, 3] \,:\, s|_{[0,2]} \in \mathcal{P}_3,\ s|_{[2,3]} \in \mathcal{P}_3,\ s''(0) = s''(3) = 0\}$$

der Raum der natürlichen kubischen Splines zur Zerlegung $T = \{t_0 = 0 < t_1 = 2 < t_2 = 3\}$.

a) Bestimmen Sie alle Tupel $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, so dass die Funktion s mit

$$s(x) \quad = \quad ax^3 + bx^2 + cx + d + e(x-2)^3_+\,, \qquad x \in [0, 3]\,,$$

in V ist.

b) Prüfen Sie, ob die Funktionen $f, g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x^2$ und $g(x) = 3(x-2)^3_+ - x^3$ in V liegen.

c) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in V$ für $h(x) = x^3$.

d) Wie lautet das Ergebnis in c), wenn an Stelle der natürlichen Randbedingungen $s''(0) = s''(3) = 0$ die Bedingungen $s'(0) = h'(0)$ und $s'(3) = h'(3)$ erfüllt sein sollen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Gegeben ist der folgende Octave/Matlab-Code:

```
1  function x = myAlgorithm(A,b)
2  % MYALGORITHM computes something
3  % ----------------------------------------
4  % INPUT
5  % A       - matrix of size mxn where m greater or equal n
6  % b       - vector of length m
7  % OUTPUT
8  % x       - vector of length n
9  % ----------------------------------------
10 % EXAMPLE: A = [ones(1,9); cos([0 3:9 12]*pi/2)]';
11 %           b = [-1 2 -2 3 1 0 -1 3 -2]';
12 %           x = myAlgorithm(A,b);
13 [m,n] = size(A);
14
15 % Block I
16 for k = 1 : n
17     y = A(k:end,k);
18     alpha = sign(y(1))*norm(y);
19     w = y + [alpha;zeros(m-k,1)];
20     v = w/norm(w);
21
22     for j = k : n
23         A(k:end,j) = A(k:end,j) - 2*(A(k:end,j)'*v)*v;
24     end
25     b(k:end) = b(k:end) - 2*(b(k:end)'*v)*v;
26 end
27
28 % Block II
29 x = [zeros(n-1,1);b(n)/A(n,n);];
30 for k = (n-1) : -1 : 1
31     x(k) = (b(k)-A(k,k+1:n)*x(k+1:n))/A(k,k);
32 end
```

a) Was berechnet der Algorithmus und welche Verfahren werden dabei in den Blöcken I und II verwendet?

b) Schreiben Sie zwei Fehlerabfragen, die einen Abbruch erzwingen, falls die Matrix `A` mehr Spalten als Zeilen besitzt oder die Länge von `b` nicht zu `A` passt. Geben Sie die Zeilen an, in welche Sie die Abfragen einfügen.

c) Die Ergebnisse der jeweils ersten Iteration (`j` = `k`) der inneren Schleife (Zeile 22-24) sind im Algorithmus bekannt und müssen nicht berechnet werden. Lagern Sie diesen Schritt in die Zeile 21 vor und schreiben Sie das bekannte Ergebnis an die passende Stelle in die Matrix `A`.