4.1 Interpolatorische Quadraturformeln

Ziel: Näherungswerte für bestimmte Integrale, wenn sich keine geschlossene Form der Stammfunktion finden lässt.

Beispiele:

- Die Stammfunktion $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ benötigt man in der Wahrscheinlichkeitstheorie, um Werte der *Normalverteilung* zu berechnen.
- Der *Integralsinus* $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ spielt eine Rolle in der Signalverarbeitung
- Integral-Exponentialfunktion $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$ und Integral-Logarithmus $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$

Möglichkeiten zur **numerischen** Berechnung von Näherungswerten:

- Potenzreihe der Stammfunktion bilden und die Partialsummen an den Integrationsgrenzen auswerten
- Hier: Formeln für Näherungsflächen verwenden (z.B. Trapezregel, Keplersche Fass-Regel)

4.1.1 Definition: Quadraturformel

Eine Näherung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ wird durch die *Quadraturformel*

$$I_n(f;[a,b]) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

angegeben, wobei

- $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ die *Knoten* (meistens in $[a,b]$ gewählt) und
- $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ die *Gewichte*

bezeichnen.
Die Quadraturformel heißt *interpolatorisch*, wenn ihre Gewichte

$$\omega_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx, \qquad k = 0, \ldots, n$$

sind, wobei $L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ die *Lagrange-Grundpolynome* bezeichnen.

Beachte: Für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p(x_k) L_{n,k}(x). \qquad \text{“}p \text{ interpoliert sich selbst”}$$

Also liefert jede interpolatorische Quadraturformel mit $n+1$ Knoten

$$I_n(p; [a,b]) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k p(x_k) = \int_a^b p(x)\, dx,$$

d.h. sie ergibt den **exakten** Wert des Integrals von p.

Definition und Bemerkung

Eine Quadraturformel hat den Exaktheitsgrad m (oder die Ordnung $m+1$), falls sie für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_m$ vom Grad kleiner oder gleich m den exakten Wert $\int_a^b p(x)\, dx$ liefert.

Jede interpolatorische Quadraturformel (mit $n+1$ Knoten) hat mindestens den Exaktheitsgrad n und höchstens den Exaktheitsgrad $2n+1$.

Denn: mindestens Exaktheitsgrad n: Definition *interpolatorisch*
höchstens Exaktheitsgrad $2n+1$: für $q(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^2$ gilt $\int_a^b q(x)\, dx > 0$, aber $I_n(q) = 0$.

4.1.2 Beispiele: Für $\int_a^b f(x)\,dx$ verwendete Quadraturformeln

a) $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *Mittelpunktsregel*

b) $\frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$ *Trapezregel*

c) $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$ *Simpsonregel*

auch als Keplersche Fass-Regel bezeichnet.

Durch Aufteilen des Intervalls $[a, b]$ in N Teile $[a_{k-1}, a_k]$ mit

$$a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}, \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

und verwenden der Mittelpunkte $y_k = \frac{a_{k-1}+a_k}{2}$, also

$$a = a_0 < y_1 < a_1 < y_2 < \cdots < a_{N-1} < y_N < a_N = b$$

erhält man die "summierten" Regeln:

a') *summierte Mittelpunktsregel*

$$I_0^\Sigma(f; N) = \frac{b-a}{N}\left(f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_N)\right)$$

b') *summierte Trapezregel*

$$I_1^\Sigma(f; N) = fracb - a2N\left(f(a) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \cdots + 2f(a_{N-1}) + f(b)\right)$$

c') *summierte Simpsonregel*

$$I_2^\Sigma(f; N) = \frac{b-a}{6N}\left(f(a) + 4f(y_1) + 2f(a_1) + 4f(y_2) + \cdots + 2f(a_{N-1}) + 4f(y_N) + f(b)\right)$$

Systematik zur Definition der "einfachen" Regeln: Gegeben sei das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

4.1.3 Definition: Newton-Cotes Formeln

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir

- die *Knoten* $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$,
- die *Gewichte* $\omega_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx$ wie üblich für eine interpolatorische Quadraturformel.

Bemerkung: Der Exaktheitsgrad der Newton-Cotes Formeln mit $n+1$ Knoten ist

$$n \text{ für ungerades } n, \qquad n+1 \text{ für gerades } n.$$

Beispiele: Die Newton-Cotes Formeln mit

- $n = 1$: Trapezregel

- $n = 2$: Simpsonregel

- $n = 3$: $\frac{3}{8}$-Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right)$$

4.1.4 Bemerkung: Ein einfacher Weg zur Berechnung der Gewichte: Anstatt der Formel $\omega_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx$ kann man die Gewichte auch aus den *Exaktheitsforderungen* bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b 1\,dx &= \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n \\
\int_a^b (x-a)\,dx &= \omega_0(x_0-a) + \omega_1(x_1-a) + \cdots + \omega_n(x_n-a) \\
&\vdots \\
\int_a^b (x-a)^n\,dx &= \omega_0(x_0-a)^n + \omega_1(x_1-a)^n + \cdots + \omega_n(x_n-a)^n
\end{aligned}
$$

Dies ist ein *lineares Gleichungssystem* mit den Unbekannten $\omega_0, \ldots, \omega_n$ und der "rechten Seite" $(b-a, \frac{(b-a)^2}{2}, \ldots, \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1})^T$, das für vorgegebene Knoten

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

eindeutig lösbar ist (Transponierte der Vandermonde-Matrix!).

Bemerkung: Als Variante verwendet man auch die *offenen* Newton-Cotes Formeln, bei denen die Randpunkte des Intervalls keine Knoten sind:

- Knoten $\quad x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n+2}, \quad k = 0, 2, \ldots, n,$
- Gewichte wie üblich (interpolatorisch)

Der Exaktheitsgrad der offenen Newton-Cotes Formeln mit $n+1$ Knoten ist wieder

$$n \;\text{ für ungerades } n, \qquad n+1 \;\text{ für gerades } n.$$

Als Beispiel für $n = 0$ ergibt sich die Mittelpunktsregel.

Die Exaktheit für Polynome vom Grad $\leq n$ führt zur Darstellung des *Fehlers* der Quadraturformel.

4.1.5 Satz: Fehler der Quadraturformel

Für eine interpolatorische Quadraturformel mit $n+1$ Knoten $x_0, \ldots, x_n$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_n(f;[a,b]) = \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\,dx.$$

4.1.6 Satz

Für eine $(m+1)$-mal differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:

a) $n = 0$, $m = 1$: *Mittelpunktsregel*

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24}\; f''(\xi)$$

b) $n = 1$, $m = 1$: *Trapezregel*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12}\; f''(\xi)$$

c) $n = 2$, $m = 3$: *Simpsonregel*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = -\frac{(b-a)^5}{2880}\; f^{(4)}(\xi)$$

Hierbei ist m jeweils der Exaktheitsgrad der Quadraturformel, $n+1$ ihre Knotenzahl und $\xi \in [a, b]$ ein geeigneter Punkt.

4.1.7 Satz

Für die summierten Quadraturformeln (Aufteilung von $[a,b]$ in N Teilintervalle der Länge $h=(b-a)/N$) gelten die folgenden Aussagen (mit geeignetem $\xi \in [a,b]$):

a') *summierte Mittelpunktsregel*:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N}\left(f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_N)\right) = \frac{(b-a)h^2}{24}\; f''(\xi)$$

b') *summierte Trapezregel*:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2N}\left(f(a)+2f(a_1)+2f(a_2)+\cdots+2f(a_{N-1})+f(b)\right) = -\frac{(b-a)h^2}{12}\; f''(\xi)$$

c') *summierte Simpsonregel*:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6N}\Big(f(a)+4f(y_1)+2f(a_1)+4f(y_2)+\cdots +2f(a_{N-1})+4f(y_N)+f(b)\Big) = -\frac{(b-a)h^4}{2880}\; f^{(4)}(\xi)$$

4.1.8 Beispiel:

Zur Berechnung von $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693147\ldots$ verwenden wir die Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel sowie die summierten Regeln mit $N = 2$ und $N = 4$ Teilintervallen:

N	1	2	4
Trapezregel	0.75	$0.70833\overline{3}$	0.697024
Mittelpunktsregel	$0.6\overline{6}$	0.685714	0.691220
Simpsonregel	$0.694\overline{4}$	0.693254	0.693154

Die Simpsonregel mit $N = 4$ Teilintervallen liefert schon 4 Nachkommastellen. Sie erfordert die Auswertung des Integranden an 9 Stellen.

In Anwendungen wird eine *Fehlertoleranz* $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann muss die Anzahl N der Teilintervalle so bestimmt werden, dass die summierte Quadraturformel die Fehlertoleranz nicht überschreitet.

4.1.9 Beispiel: Wie groß muss N für die Aufteilung in Teilintervalle der Länge $h = (b-a)/N$ gewählt sein, damit die Berechnung von $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693147\ldots$ mit der Fehlertoleranz $\epsilon = 10^{-6}$ erfolgt:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

In den Fehlerdarstellungen verwenden wir

$$\max_{\xi\in[1,2]} |f''(\xi)| = 2, \qquad \max_{\xi\in[1,2]} |f^{(4)}(\xi)| = 24.$$

- summierte Trapezregel: $\frac{(b-a)h^2}{12}\,|f''(\xi)| \leq \frac{1}{6N^2} < 10^{-6}$ gilt für $N > \sqrt{10^6/6}$, also $N \geq 409$. Dafür sind $N+1 = 410$ Auswertungen von f erforderlich.

- summierte Mittelpunktsregel: $\frac{(b-a)h^2}{24}\,|f''(\xi)| \leq \frac{1}{12N^2} < 10^{-6}$ gilt für $N > \sqrt{10^6/12}$, also $N \geq 289$. Dafür sind $N = 289$ Auswertungen von f erforderlich.

- summierte Simpsonregel: $\frac{(b-a)h^4}{2880}\,|f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{1}{120N^4} < 10^{-6}$ gilt für $N > \sqrt[4]{10^6/120}$, also $N \geq 10$. Dafür sind $2N+1 = 21$ Auswertungen von f erforderlich.

4.2 Gaußsche Quadraturformeln

Frage: Können noch bessere Annäherungen erzielt werden, indem auch die Knoten $x_0, \ldots, x_n$ geschickter gewählt werden?

Als positive Antwort werden die Gauß-Formeln entwickelt. Dazu wählen wir die Knoten x_k und die Gewichte ω_k, $0 \leq k \leq n$, so, dass der größtmögliche Exaktheitsgrad $2n+1$ erzielt wird.

Heuristische Überlegung: Die Exaktheitsbedingungen zum Grad $2n+1$ ergeben $2n+2$ nichtlineare Gleichungen mit den $2n+2$ Unbekannten $x_0, \ldots, x_n$ und $\omega_0, \ldots, \omega_n$.

4.2.1 Beispiel:: Zwei-punktige Gauß-Formel auf dem Intervall $[-1, 1]$

Die Exaktheitsbedingungen lauten

$$\begin{array}{rcccccc} \int_{-1}^{1} dx & = & 2 & = & \omega_0 & + & \omega_1 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx & = & 0 & = & \omega_0 x_0 & + & \omega_1 x_1 \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx & = & \frac{2}{3} & = & \omega_0 x_0^2 & + & \omega_1 x_1^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3\,dx & = & 0 & = & \omega_0 x_0^3 & + & \omega_1 x_1^3 \end{array}$$

Die *eindeutige* Lösung lautet:

$$x_0 = -\sqrt{3}/3, \quad x_1 = \sqrt{3}/3, \quad \omega_0 = \omega_1 = 1,$$

also erhalten wir die Gauß-Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\sqrt{3}/3\right) + f\left(\sqrt{3}/3\right).$$

Beachte: Symmetrie der Knoten ($x_0 = -x_1$) und Gewichte ($\omega_0 = \omega_1$)

4.2.2 Satz: Nullstellen der Orthogonalpolynome

Das gewichtete Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ für $C[-1, 1]$ erfülle die Voraussetzung der 3-Term Rekursion in Satz 3.3.12. Dann gilt für die Orthogonalpolynome $\widetilde{p}_n$ (mit Höchstkoeffizient 1):

- $\widetilde{p}_n$ hat n einfache Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$,

$$-1 < \xi_1^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < 1.$$

- Die Nullstellen von $\widetilde{p}_{n-1}$ trennen die Nullstellen von $\widetilde{p}_n$,

$$-1 < \xi_1^{(n)} < \xi_1^{(n-1)} < \xi_2^{(n)} < \xi_2^{(n-1)} \cdots < \xi_{n-1}^{(n)} < \xi_{n-1}^{(n-1)} < \xi_n^{(n)} < 1.$$

Beweis:
a) Setze $N := \{\xi \in (-1,1) : \xi$ ist Nullstelle von $\widetilde{p}_n$ mit ungerader Vielfachheit$\}$.
Zu zeigen ist $\#N = n$.

Falls $\#N < n$, setze $q(x) = \prod_{\xi \in N}(x - \xi) \in \mathcal{P}_{n-1}$. Dann hat $q\widetilde{p}_n$ keine Vorzeichenwechsel in $[-1,1]$, also ist

$$\int_{-1}^{1} q(x)\widetilde{p}_n(x)\omega(x)\,dx \neq 0,$$

im Widerspruch zur Orthogonalität von $\widetilde{p}_n$ zu $\mathcal{P}_{n-1}$.

b) per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:

- Die Nullstellen von $\widetilde{p}_0$ (keine) trennen die von $\widetilde{p}_1$.

- Es gelte die Trennungseigenschaft für die Nullstellen von $\widetilde{p}_{n-1}$ und $\widetilde{p}_n$. Insbesondere ist $\widetilde{p}_{n-1}(\xi_j^{(n)}) \neq 0$ für $j = 0, \dots, n$. Die Drei-Term-Rekursion ergibt für $\widetilde{p}_{n+1}$ ausgewertet an den Nullstellen von $\widetilde{p}_n$:

$$\operatorname{sign}(\widetilde{p}_{n+1}(\xi_j^{(n)})) = \operatorname{sign}\left(-\underbrace{\gamma_n}_{>0}\widetilde{p}_{n-1}(\xi_j^{(n)})\right) = -\operatorname{sign}(\widetilde{p}_{n-1}(\xi_j^{(n)})).$$

  Wegen Höchstkoeffizient 1, Betrachtung der Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und Lage aller Nullstellen in $(-1, 1)$ ist außerdem

$$\operatorname{sign}\widetilde{p}_{n+1}(1) = \operatorname{sign}\widetilde{p}_{n-1}(1) = 1, \qquad \operatorname{sign}\widetilde{p}_{n+1}(-1) = \operatorname{sign}\widetilde{p}_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}.$$

  Die Trennungseigenschaft der (einfachen) Nullstellen von $\widetilde{p}_{n-1}$ ergibt

$$\operatorname{sign}\widetilde{p}_{n-1}(\xi_j^{(n)}) = (-1)^{n-j}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

  also für $\widetilde{p}_{n+1}$

$$\operatorname{sign}\widetilde{p}_{n+1}(\xi_j^{(n)}) = (-1)^{n+1-j}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

  Daraus erhalten wir je eine Nullstelle von $\widetilde{p}_{n+1}$ in den offenen Intervallen

$$(-1, \xi_1^{(n)}), \quad (\xi_1^{(n)}), \xi_2^{(n)}), \dots, (\xi_{n-1}^{(n)}), \xi_n^{(n)}), \quad (\xi_n^{(n)}), 1).$$

  Dies ist die Trennungseigenschaft der Nullstellen von $\widetilde{p}_n$ und $\widetilde{p}_{n+1}$.

4.2.3 Satz: Gauß-Formeln auf $[-1, 1]$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ existieren eindeutig bestimmte Knoten

$$-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$$

und Gewichte $\omega_k > 0$, so dass die Quadraturformel

$$I_n(f; [-1, 1]) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$$

den Exaktheitsgrad $2n + 1$ hat.

- Die Knoten sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms L_{n+1} in 3.3.11.
- Die Gewichte erfüllen

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} L_{n,k}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (L_{n,k}(x))^2\,dx > 0, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

- Es gelten die Symmetrie-Eigenschaften

$$x_k = -x_{n-k}, \quad \omega_k = \omega_{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Beweis: Wir wählen $x_0, \dots, x_n$ als die Nullstellen von L_{n+1} und die Gewichte für die interpolatorische Q.f. als

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} L_{n,k}(x)\, dx.$$

1. Diese Q.f. hat den Exaktheitsgrad $2n+1$:
   Sei $q \in \mathcal{P}_{2n+1}$. Polynomdivision ergibt

   $$q = pL_{n+1} + r \qquad \text{mit} \quad p, r \in \mathcal{P}_n.$$

   Damit ist einerseits

   $$\int_{-1}^{1} q(x)\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} p(x) L_{n+1}(x)\, dx}_{=0 \quad \text{wg.Orth.}} + \int_{-1}^{1} r(x)\, dx,$$

   und andererseits

   $$I_n(q) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k \left(\underbrace{p(x_k) L_{n+1}(x_k)}_{=0 \quad \text{wg.Nullst.}} + r(x_k) \right) = I_n(r).$$

   Die Exaktheit von I_n für $\mathcal{P}_n$ folgt aus der Wahl der Gewichte, also insgesamt

   $$\int_{-1}^{1} q(x)\, dx = \int_{-1}^{1} r(x)\, dx = I_n(r) = I_n(q).$$

2. Darstellungen der Gewichte und Symmetrie:

   Für die Gewichte dieser Q.f. folgt aus $L_{n,j}^2 \in \mathcal{P}_{2n}$ und der Exaktheit für $\mathcal{P}_{2n+1}$ sofort

   $$\omega_k = \sum_{j=0}^{n} \omega_j (L_{n,j}(x_k))^2 = \int_{-1}^{1} (L_{n,j}(x))^2 \, dx,$$

   also insbesondere $\omega_k > 0$ für $k = 0, \ldots, n$.

   Symmetrie der Knoten: L_{n+1} ist gerade bzw. ungerade.

   Symmetrie der Gewichte: $L_{n,k}(x) = L_{n,n-k}(-x)$

3. Eindeutigkeit:

   Sei I_n eine Q.f. mit paarweise verschiedenen Knoten $x_0, \ldots, x_n$, Gewichten $\omega_0, \ldots, \omega_n$ und Exaktheitsgrad $2n+1$. Für das zugehörige Knotenpolynom $w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ gilt

   $$w \in \mathcal{P}_{n+1}, \qquad \int_{-1}^{1} \underbrace{q(x)w(x)}_{\in \mathcal{P}_{2n+1}} \, dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k q(x_k) \underbrace{w(x_k)}_{=0} = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathcal{P}_n.$$

   Also ist $w \perp \mathcal{P}_n$; sein Höchstkoeffizient ist 1, und deshalb ist $w = L_{n+1}$.

Beispiele:

- $L_1(x) = x$ hat die einzige Nullstelle $x_0 = 0$. Die Ein-punktige Gauß-Formel ist die Mittelpunktsregel.
- $L_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ hat die Nullstellen $x_0 = -\sqrt{3}/3$, $x_1 = \sqrt{3}/3$. Dies sind die Knoten der Zwei-punktigen Gauß-Formel in Bsp. 4.2.1.
- $L_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$ hat die Nullstellen $x_0 = -\sqrt{3/5}$, $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{3/5}$. Die Gewichte der 3-punktigen Gauß-Formel werden durch 3 lineare Gleichungen aus den Exaktheitsbedingungen zum Grad 2 ermittelt:

$$\omega_0 = \omega_2 = \frac{5}{9}, \qquad \omega_1 = \frac{8}{9}.$$

4.2.4 Satz: Fehlerformel

Die Gauß-Formel I_n, deren Knoten die Nullstellen des Legendre-Polynoms L_{n+1} sind, erfüllt die Fehlerformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_n(f) = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{[(2n+2)!]^3(2n+3)} f^{(2n+2)}(\xi), \quad \text{mit} \quad \xi \in [-1,1]$$

Beweis: Wir betrachten neben der Gauß-Formel

$$I_n(f;[-1,1]) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$$

auch die *Hermite-Quadraturformel*

$$J_n(f;[-1,1]) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k f(x_k) + \beta_k f'(x_k)),$$

wobei die Wahl der Gewichte

$$\alpha_k = \int_{-1}^{1} H_{n,k}(x)\,dx, \qquad \beta_k = \int_{-1}^{1} \widetilde{H}_{n,k}(x)\,dx$$

mit den *Hermite-Grundpolynomen* zu den *doppelten* Knoten $x_0, \ldots, x_n$ erfolgt (siehe Übungsblatt 7). Die Quadraturformel J_n besteht aus Integration des Hermite-Interpolationspolynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) H_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) \tilde{H}_{n,k}(x)$$

und besitzt deshalb den Exaktheitsgrad $2n+1$. Die Integrale der Hermite-Grundpolynome sind (wegen Exaktheitsgrad $2n+1$ sowohl von J_n als auch von I_n)

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \int_{-1,1} H_{n,k}(x)\,dx = I_n(H_{n,k}) = \omega_k, \\ \beta_k &= \int_{-1,1} \widetilde{H}_{n,k}(x)\,dx = I_n(\widetilde{H}_{n,k}) = 0. \end{aligned}$$

Also stimmen I_n und J_n überein!

Der Quadraturfehler wird mit Hilfe des Interpolationsfehlers der Hermite-Interpolation bestimmt (vgl. Satz 3.1.15 mit dem erweiterten Knotenvektor)

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_n(f) = \int_{-1}^1 f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2\,dx.$$

Die dividierte Differenz hat die Ordnung $2n+2$, das Produkt ist $(L_{n+1}(x))^2$. Der verallg. MWS und die Normalisierung in Beispiel 3.3.11 ergeben

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - I_n(f) &= f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, \xi] \int_{-1}^1 (L_{n+1}(x))^2\,dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \, \frac{((n+1)!)^4}{((2n+2)!)^2} \, \frac{2^{2n+3}}{2n+3}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

a) Die Gauß-Formel für $\int_a^b f(x)\,dx$ erhält man durch Variablentransformation:

$$x \in [-1,1] \iff t(x) = a + \frac{b-a}{2}(1+x) \in [a,b]$$

ergibt die Knoten

$$t_k = a + \frac{b-a}{2}(1+x_k) \qquad (x_k \text{ Knoten in } [-1,1])$$

und die Gewichte

$$\eta_k = \frac{b-a}{2}\,\omega_k.$$

b) Eine weitere Erhöhung der Genauigkeit erzielt man durch Aufteilen des Intervalls in Teilintervalle (*summierte Gauß-Formeln*)

4.2.5 Beispiel:

Für $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693147...$ verwenden wir die auf das Interall $[1,2]$ transformierten Gauß-Formeln mit 2 bzw. 3 Knoten und die der summierten Gauß-Formeln mit 2 Teilintervallen.
Zum Vergleich geben wir jeweils die Werte der Simpson-Regel an.

N	1	2
Simpsonregel	$0.694\overline{4}$	0.693254
2-punkt. Gauß-Formel	0.692308	0.693077
3-punkt. Gauß-Formel	0.693122	0.693146

4.2.6 Ergänzung: gewichtetes Integral

Für das gewichtete Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx$$

erhält man den Exaktheitsgrad $2n+1$, wenn die Knoten x_k als Nullstellen des Orthogonalpolynoms $\widetilde{p}_{n+1}$ vom Grad $n+1$ und die Gewichte

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} L_{n,k}(x)\,\omega(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (L_{n,k}(x))^2\,\omega(x)\,dx > 0, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

gewählt werden. Dann ist der Quadraturfehler mit einem $\xi \in (-1, 1)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} (\widetilde{p}_{n+1}(x))^2\,\omega(x)\,dx.$$

Speziell für $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:
Die *Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformeln* haben die Knoten

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{2k+1}{n+1}\right), \qquad k = 0, \ldots, n,$$

dies sind die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} erster Art (absteigend sortiert), siehe Beispiel 3.3.9(b). Alle Gewichte

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} L_{n,k}(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

sind gleich, das liefert $I_n(f) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

Der Quadraturfehler hat die Darstellung

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - I_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!}\,f^{(2n+2)}(\xi), \qquad \xi \in (-1, 1).$$

Beweis: Wir zeigen die Exaktheit für $\mathcal{P}_n$, indem wir den Quadraturfehler für T_m, $m = 0, \ldots, n$, berechnen.

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & m = 0, \\ 0, & m \geq 1 \end{cases}$$

$$I_n(T_m) = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{m\pi}{2} \frac{2k+1}{n+1}\right) = \begin{cases} \pi, & m = 0, \\ 0, & 1 \leq m \leq n. \end{cases}$$

Die Summe 0 ergibt sich mit Hilfe der Eulerschen Formel aus

$$\begin{aligned} e^{i \frac{m\pi}{2} \frac{2n+1}{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{m\pi}{2} \frac{2k+1}{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i \frac{m\pi}{2} \frac{2n+2k+2}{n+1}} + e^{i \frac{m\pi}{2} \frac{2n-2k}{n+1}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} e^{im\pi \frac{k}{n+1}} = \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i \frac{m\pi}{n+1}}} = 0. \end{aligned}$$

Die Konstante in der Fehlerdarstellung ergibt sich aus

$$\int_{-1}^{1} (w(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2^{2n}} \int_{-1}^{1} (T_{n+1}(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}.$$

Man beachte hierbei, dass $T_{n+1}(x) = 2^n w(x)$ gilt, weil T_{n+1} den Höchstkoeffizienten 2^n hat.

Die Positivität der Gewichte der Gauß-Formeln bewirkt, dass die Operator-Norm von I_n auf $C[-1,1]$

$$\|I_n\| = \sup\{|I_n f| : f \in C[-1,1],\ \|f\|_\infty = 1\}$$

unabhängig von $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert

$$\|I_n\| = \sum_{k=0}^{n} \omega_k = \int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx$$

hat. Daraus resultiert eine wichtige Folgerung.

4.2.7 Satz: Konvergenz der Gauß-Formeln

Für die Gauß-Formel I_n mit $n+1$ Knoten zum gewichteten Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx$ und jede Funktion $f \in C[-1,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\omega(x)\,dx.$$

4.3 Das Rombergsche Integrationsverfahren

Die Verwendung der summierten Trapezregel zu *verschiedenen* Schrittweiten wird als Ausgangspunkt zur *Schrittweiten-Extrapolation nach Romberg* verwendet.

4.3.1 Hauptsatz: Entwicklung des Quadraturfehlers nach h-Potenzen

Für $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $N \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/N$, sei

$$a(h) = I_1^{\Sigma}(f;N) = \frac{h}{2}f(a) + h\sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh) + \frac{h}{2}f(b).$$

Es gilt die *Euler-Maclaurinsche Summenformel*

$$\begin{aligned} a(h) &= \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + \\ & (b-a)\frac{B_{2m+2}h^{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi) \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in [a,b]$ und den *Bernoulli-Zahlen* B_{2k}.

4.3.2 Definition: Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen

Die Polynome $b_k \in \mathcal{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit

$$b_0(x) = 1, \qquad b_k'(x) = k b_{k-1}(x) \;\text{ und }\; \int_0^1 b_k(x)\,dx = 0 \;\text{ für }\; k \geq 1,$$

heißen *Bernoulli-Polynome*, ihr Funktionswert $B_k := b_k(0)$ heißt *Bernoulli-Zahl*.

Bemerkung zu den Bernoulli-Zahlen:

a) Bernoulli-Zahlen sind

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

b) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $B_{2k+1} = 0$.

c) Rekursionsformel:

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \frac{B_j}{k-j+1} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

d) Die Bernoulli-Zahlen treten vielfach auf, z.B. bei den Reihenwerten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} \pi^{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}$$

4.3.3 Eigenschaften der Bernoulli-Polynome:

(i) Für $k \geq 2$ ist $b_k(1) = b_k(0) = B_k$, weil $\displaystyle\int_0^1 b_k'(x)\,dx = k\int_0^1 b_{k-1}(x)\,dx = 0$ gilt.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $|B_{2k}| = \max_{x\in[0,1]} |b_{2k}(x)|$.
(ohne Beweis)

(iii) Für $k \geq 0$ ist $b_k(x) = (-1)^k b_k(1-x)$:

Beweis: klar für $k = 0$, per Induktion mit

$$\frac{d}{dx}[b_k - (-1)^k b_k(1-\cdot)]'(x) = k\left(b_{k-1}(x) - (-1)^{k-1} b_{k-1}(1-x)\right) = 0,$$

also $b_k - (-1)^k b_k(1-\cdot) = c_k$ mit einer Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \geq 1$. Man berechnet

$$c_k = \begin{cases} b_k(0) - b_k(1) = 0 & \text{für gerades } k \geq 2 \text{ wegen (i)}, \\ \displaystyle\int_0^1 (b_k(x) + b_k(1-x))\,dx = 0 & \text{für ungerades } k \geq 1 \text{ wegen } \int_0^1 b_k(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

(iv) Die Bernoulli-Polynome können mit Hilfe ihrer *erzeugenden Funktion* definiert werden:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(x)}{k!}\, t^k, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 < |t| < 2\pi.$$

Mit dieser Darstellung lassen sich die meisten Eigenschaften der b_k beweisen, indem man einen Koeffizientenvergleich für Potenzreihen verwendet.
(Übungsaufgabe)

(v) Einsetzen von $x = 0$ ergibt die erzeugende Funktion der Bernoulli-Zahlen

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, t^k, \qquad 0 < |t| < 2\pi.$$

Beweis von Satz 4.3.1: Für $f \in C^{2m+2}([0,N])$ folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x+\ell)\,dx &= \int_0^1 b_0(x) f(x+\ell)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\ell)+f(\ell+1)\right) - \int_0^1 b_1(x) f'(x+\ell)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\ell)+f(\ell+1)\right) - B_2\left(f'(\ell+1)-f'(\ell)\right) + \int_0^1 b_2(x) f''(x+\ell)\,dx \;\ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\ell)+f(\ell+1)\right) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(\ell+1) - f^{(2k-1)}(\ell)\right) + \\
&\quad \int_0^1 \frac{b_{2m+2}(x)}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(x+\ell)\,dx.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $b_k(1) = b_k(0) = B_k$ und $B_{2k+1} = 0$ für $k \geq 1$ benutzt.

Der letzte Summand zusammen mit dem letzten Integral ergibt

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{b_{2m+2}(x) - B_{2m+2}}{(2m+2)!}}_{\text{festes Vorzeichen}} f^{(2m+2)}(x+\ell)\,dx.$$

Das feste Vorzeichen von $b_{2m+2}(x) - B_{2m+2}$ ergibt sich aus Eigenschaft (ii).

Beim Zusammensetzen der Integrale von 0 bis N fallen einige Summanden wie bei einer Teleskopsumme weg. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^N f(x)\,dx \quad = \quad & \frac{1}{2}\,(f(N)+f(0)) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(N) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \\ & \int_0^N \frac{\widetilde{b}_{2m+2}(x) - B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, f^{(2m+2)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dabei ist $\widetilde{b}_{2m+2}$ die periodische Fortsetzung von b_{2m+2} vom Intervall $[0,1]$ auf $[0,N]$, die Differenz $\widetilde{b}_{2m+2}(x) - B_{2m+2}$ hat also festes Vorzeichen auf $[0,N]$. Mit dem erweiterten Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{\widetilde{b}_{2m+2}(x) - B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, f^{(2m+2)}(x)\,dx \quad &= \quad f^{(2m+2)}(\xi)\int_0^N \frac{\widetilde{b}_{2m+2}(x) - B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,dx \\ &= \quad -\frac{NB_{2m+2}}{(2m+2)!}\, f^{(2m+2)}(\xi)\end{aligned}$$

mit $\xi \in [0,N]$.

Die Aussage von Satz 4.3.1 folgt durch Koordinatentransformation von $[0,N]$ auf $[a,b]$.

Direkte Anwendung des Extrapolationssatzes 3.2.3:

4.3.4 Satz: Romberg-Verfahren

Gegeben seien $f \in C^{2m+2}[a,b]$ sowie eine monoton wachsende Folge $(N_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ natürlicher Zahlen mit

$$0 < \frac{N_j}{N_{j+1}} \le \rho < 1, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Zu den Werten der summierten Trapezregel

$$a_{j,0} = a(h_j) = I_1^{\Sigma}(f;N_j), \qquad h_j = \frac{b-a}{N_j},$$

lauten die Einträge der Extrapolationstafel (nach Romberg)

$$a_{j,k} = a_{j,k-1} + \frac{a_{j,k-1} - a_{j-1,k-1}}{\left(\frac{h_{j-k}}{h_j}\right)^2 - 1}, \quad k = 1,\dots,m, \ \ j = k,\dots,m.$$

Für $0 \leq k \leq m$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx - a_{j,k} = \mathcal{O}(h_{j-k}^{2k+2}) \quad \text{für} \quad k \leq j \to \infty.$$

Speziell für $h_j = 2^{-j} h_0$ gilt also

$$\int_a^b f(x)\,dx - a_{j,k} = \mathcal{O}(h_0^{2k+2}\; 2^{-(2k+2)(j-k)}) \quad \text{für} \quad k \leq j \to \infty.$$

4.3.5 Folgerung für periodische Funktionen:

Für **periodische** Funktionen $f \in C^{2m+2}(\mathbb{R})$ mit Periodenlänge $b-a$ fällt die summierte Trapezregel zur Schrittweite $h = (b-a)/N$ mit der Rechteckregel zusammen:

$$I_1^{\Sigma}(f;N) = \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh) + \frac{h}{2} f(b) = h \sum_{j=0}^{N-1} f(a+jh).$$

Außerdem fallen die Terme $f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) = 0$ in der Euler-Maclaurinschen Summenformel weg, d.h.

$$a(h) = h \sum_{j=0}^{N-1} f(a+jh) = \int_a^b f(x)\,dx + \mathcal{O}(h^{2m+2}).$$

Die Extrapolation führt hier zu keiner Verbesserung.

Ist sogar $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ periodisch mit Periodenlänge $b-a$, so konvergiert die Rechteckregel zur Schrittweite h schneller gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ als jede Potenz von h. Die Verwendung komplizierterer Quadraturformeln wäre hierfür eher schädlich!

4.4 Praktische Aspekte der Integration

Ziel: Kriterien für die Wahl der Schrittweite der zusammengesetzten Quadraturformeln zum Erzielen der Genauigkeit ϵ (oder eps)

- Die *a priori*-Berechnung durch Verwendung der Fehlerformeln verlangt Kenntnisse einer hohen Ableitung von f. Dies ist für praktische Zwecke nicht sinnvoll.
- Typ 1: Verwendung zweier Formeln zur *Einschließung* des Integralwerts.
- Typ 2: Verwendung zweier Schrittweiten zur numerischen *a posteriori*-Schätzung des Fehlers.

4.4.1 Typ 1: Einschließung des Integralwerts

Die summierte Simpson-Regel zu N Unterteilungen, $h = (b-a)/N$, hat die Fehlerformel

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_2^{\Sigma}(f;N) = -\frac{(b-a)h^4}{2880}\, f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi \in [a,b].$$

Die summierte Form der offenen Newton-Cotes Formel (mit 3 Knoten pro Intervall) lautet

$$\widetilde{I}_2^{\Sigma}(f;N) = \frac{b-a}{3N} \sum_{k=0}^{N-1} \big(2f(a_k + h/4) - f(a_k + h/2) + 2f(a_k + 3h/4)\big), \qquad a_k = a + kh,$$

und hat die Fehlerformel

$$\int_a^b f(x)\,dx - \widetilde{I}_2^{\Sigma}(f;N) = \frac{7(b-a)h^4}{23040}\, f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi \in [a,b].$$

Vergleich der beiden Fehlerterme zeigt, dass bei konstantem Vorzeichen von $f^{(4)}$ im Intervall $[a,b]$ der exakte Wert durch beide Quadraturformeln eingeschlossen wird, also

$$\widetilde{I}_2^{\Sigma}(f;N) \le \int_a^b f(x)\,dx \le I_2^{\Sigma}(f;N) \quad \text{oder} \quad I_2^{\Sigma}(f;N) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \widetilde{I}_2^{\Sigma}(f;N)$$

gilt.

Die Voraussetzung an $f^{(4)}$ ist i.A. nicht für $[a,b]$ erfüllt, jedoch für (fast) alle Teilintervalle. Als numerische Einschließung kann man daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} \min\{I_2(f;[a_k,a_{k+1}]),\ \widetilde{I}_2(f;[a_k,a_{k+1}])\} &\leq \int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \max\{I_2(f;[a_k,a_{k+1}]),\ \widetilde{I}_2(f;[a_k,a_{k+1}])\}\end{aligned}$$

verwenden.

4.4.2 Typ 2: a-posteriori Fehlerschätzung

- Es wird die Fehlerdarstellung der summierten Quadraturformel zur Schrittweite $h = (b-a)/N$ in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_n^{\Sigma}(f;N) = c_f h^k + r(f,h)h^{k+1}$$

mit einer Konstanten c_f und einer beschränkten Funktion $r(f,.)$ vorausgesetzt.

- Es stehen zwei Werte $I_n^{\Sigma}(f;N_1)$ und $I_n^{\Sigma}(f;N_2)$ zu den Schrittweiten $h_1 > h_2 > 0$, $h_j = (b-a)/N_j$, $j = 1,2$, zur Verfügung.

Dann kann die Konstante c_f geschätzt werden durch Lösen von

$$c_f(h_1^k - h_2^k) = -\left(I_n^{\Sigma}(f;N_1) - I_n^{\Sigma}(f;N_2)\right) + \mathcal{O}(h_1^{k+1}).$$

Für $h_1 \ll 1$ folgt

$$c_f \approx -\frac{I_n^{\Sigma}(f;N_1) - I_n^{\Sigma}(f;N_2)}{h_1^k - h_2^k}.$$

Die "richtige" Schrittweite h für die vorgegebene Toleranz ϵ ist nun

$$h = (\epsilon/c_f)^{1/k}.$$

4.4.3 Praktischer Aspekt: adaptive Unterteilung

- Bei den summierten Quadraturformeln zur Schrittweite $h = (b-a)/N$ treten in den Teilintervallen ganz unterschiedliche Fehlergrößen auf:
  $f(x) = \sqrt{|x-0.7|}$ ist bei $x = 0.7$ nicht differenzierbar, zu erwarten sind große Fehler in diesem Abschnitt.

- Daher wird die Schrittweite nicht überall halbiert, sondern nur in Intervallen $[a_k, a_{k+1}]$, wo ein Fehlerschätzer signalisiert, dass

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx - I_n(f, [a_k, a_{k+1}]) \right| > \frac{\epsilon(a_{k+1} - a_k)}{(b-a)}$$

  gilt. Dadurch entsteht eine *adaptive Unterteilung* von $[a, b]$.

4.4.4 Beispiel:

Der `Matlab/Octave` Befehl `quad` verwendet eine adaptive summierte Simpson-Regel. Die Integration

$$\int_0^1 \sqrt{|x-0.7|}\,dx$$

zur Genauigkeit $\epsilon = 10^{-4}$ und Ausgabe der einzelnen Unterteilungsintervalle (mit Hilfe der `trace`-Variablen) lautet

```
f=inline('sqrt(abs(x-0.7))');
trace=1;
q=quad(f,0,1,1e-4,trace)
```

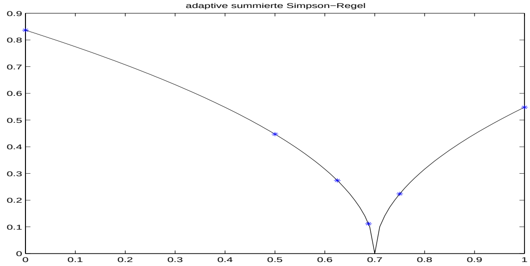
Die alte Matlab-Version R12 verwendet adaptive Halbierung des Intervalls $[0,1]$ und erhält die Zwischenpunkte

$$(a_0 = 0),\ a_1 = 0.5,\ a_2 = 0.625,\ a_3 = 0.6875,\ a_4 = 0.75,\ (a_5 = 1)$$

($\rightarrow$ Baumstruktur der Unterteilung). Die neue Version (Matlab R2012) verwendet eine willkürliche Anfangs-Unterteilung in 3 Teilintervalle

$$[a, a+0.27158(b-a)],\quad [a+0.27158(b-a), b-0.27158(b-a)],\quad [b-0.27158(b-a), b]$$

und beginnt dann mit adaptiver Halbierung.


adaptive summierte Simpson−Regel
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1