TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 1

Abgabe: am 27.04.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Laplacegleichung auf einem Rechteck in* $\mathbb{R}^2$. Sei $L > 0$ und $R = (-L, L) \times (-1, 1)$. Finden Sie alle Lösungen der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ in R, die von der Form $u(x, y) = v(x)w(y)$ sind und $u(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in (-L, L) \times \{-1, 1\}$ erfüllen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Polarkoordinaten.* Betrachten Sie die Transformation

$$T : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad T(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)^T \tag{1}$$

von Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ auf euklidische Koordinaten. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ sei $v : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(r, \varphi) = u(T(r, \varphi))$. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\Delta u = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)v$$

gilt. Finden Sie weiterhin eine Lösung der Form $v(r, \varphi) = w(r)z(\varphi)$ von $\Delta u = 0$ in der Einheitskreisscheibe mit den Randbedingungen $u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos(k\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$. Erfüllt diese Funktion die Laplacegleichung für $(x, y) = 0$? Was passiert mit $k \to \infty$?

Hinweis: Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für w her und benutzen Sie etwa die Variablentransformation $r = e^s$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Laplacegleichung und orthonormale Transformationen.* Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta f = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jede orthonormale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Funktion $\tilde{f} := f \circ O$ ebenfalls $\Delta\tilde{f} = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für die partiellen Differentialgleichungen (a) – (e) soll jeweils eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ mit geeigneten $n, N \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass

$$F\big(y, u(y), Du(y), D^2u(y), \dots\big) = 0$$

gilt, falls $u = u(y)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Weiter soll die Ordung der Differentialgleichung bestimmt werden und es soll geprüft werden, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt.

(a) Korteweg-deVries-Gleichung: $\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0$ mit $u = u(x, t)$, $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(b) Biharmonische Gleichung: $\Delta^2 u = f$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(c) Black-Scholes-Gleichung: $\partial_t u(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 u(x, t) + rx\partial_x u(x, t) - ru(x, t) = 0$, wobei σ, r gegebene Konstanten sind und $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(d) Schrödinger-Gleichung: $\mathrm{i}\hbar\partial_t u + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u = Vu$, wobei $\hbar, m$ konstant, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$.

(e) Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0,$$
$$\partial_t E = \nabla \times B,\ \partial_t B = -\nabla \times E,$$

mit $B, E : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$. Hierbei werden die Zeitableitungen in jeder Komponente gebildet. Es bezeichnen $\nabla\cdot$ den Divergenzoperator und $\nabla\times$ den Rotationsoperator, das heißt

$$\nabla \cdot E = \partial_{x_1}E_1 + \partial_{x_2}E_2 + \partial_{x_3}E_3, \quad \nabla \times E = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}E_3 - \partial_{x_3}E_2 \\ \partial_{x_3}E_1 - \partial_{x_1}E_3 \\ \partial_{x_1}E_2 - \partial_{x_2}E_1 \end{pmatrix}.$$