TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 2

Abgabe: am 04.05.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 5 (4 Punkte). *Lösung der Poisson-Gleichung mittels Fourier-Transformation.*
Betrachten Sie für $n \geq 3$ die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

mit einer gegebenen rechten Seite $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und einer gesuchten Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Poisson-Gleichung mit $u, \nabla u, D^2 u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf die Poisson-Gleichung an und leiten Sie so eine Darstellungsformel für $\mathcal{F}u$ her.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

(c) Wenden Sie die inverse Fouriertransformation auf die Darstellung aus (a) an und zeigen Sie, dass

$$(\mathcal{F}u)\check{}(x) = \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{2-n} \, \mathrm{d}y$$

ist. Hierbei bezeichnet $\alpha(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Hinweis: Verwenden Sie in Teil (c) die Darstellung

$$|\xi|^{-2} = \int_0^\infty e^{-|\xi|^2 t} \, \mathrm{d}t \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Weiterhin dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass

$$\int_0^\infty s^{\frac{n}{2}-2} e^{-s} \, \mathrm{d}s = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)n\alpha(n)}$$

ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte). *Lösung der Transportgleichung mittels Fourier-Transformation.*
Betrachten Sie die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + c \cdot \nabla_x u(x,t) &= 0, \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Lösung u erfülle $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und zusätzlich $u(\cdot,t), \partial_t u(\cdot,t), \nabla_x u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $t > 0$.
Wenden Sie für festes $t \geq 0$ die Fourier-Transformation im Raum auf die Gleichung an und bestimmen Sie so eine explizite Darstellung von u.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch, das heißt $-\Delta u = 0$, und $n \geq 3$. Beweisen Sie, dass dann für alle $x \neq 0$

$$\Delta \left(|x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2} \right) \right) = 0$$

gilt.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $n \geq 3$ und $N(x) = \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)}|x|^{-n+2}$ das Newton-Potential. Sei $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n))$ rotationssymmetrisch und $u := N * f$. Zeigen Sie, dass auch u rotationssymmetrisch ist.