TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 3
Abgabe: am 11.05.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** *Fortsetzung von Aufgabe 8*
Wie in Aufgabe 8 sei $n \geq 3$ und N das Newton-Potential. Weiter sei $f \in C_c^2(B(0,r))$ rotationssymmetrisch und $u := N * f$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) \;=\; N(x) \int_{B(0,r)} f(y)\,dy \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x| > r.$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie, dass u rotationssymmetrisch ist. Betrachten Sie die Funktion $\tilde{u}$ mit $\tilde{u}(|x|) = u(x)$ und bestimmen Sie einen Ausdruck für Δu. Vergleichen Sie dazu mit Aufgabe 2.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie für $n \geq 2$ das Newton-Potential $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} &N \in L^p(B(0,1)) && \text{falls } p \in \left[1, \tfrac{n}{n-2}\right), n \geq 2,\\ &N \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)) && \text{falls } p \in \left(\tfrac{n}{n-2}, \infty\right), n \geq 3. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} &\nabla N \in L^p(B(0,1);\mathbb{R}^n) && \text{falls } p \in \left[1, \tfrac{n}{n-1}\right), n \geq 2,\\ &\nabla N \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,1);\mathbb{R}^n) && \text{falls } p \in \left(\tfrac{n}{n-1}, \infty\right), n \geq 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** *Ergänzung zum Beweis von Satz 3.4*
Es sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u = N * f$. Zeigen Sie, dass $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist und

$$\partial_{jk}^2 u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \partial_{jk}^2 f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $j,k = 1,\ldots,n$ erfüllt.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** *Nichtlineare Poisson-Gleichung*
Sei $M = \{u \in C^1(\mathbb{R}^n) \mid (1-u^2) \in L^2(\mathbb{R}^n), |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Betrachten Sie das Funktional

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\left(1-u^2\right)^2\right) \;,\; u \in M$$

und leiten Sie für einen Minimierer $u \in M \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ von I eine partielle Differentialgleichung her.