TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 4

Abgabe: am 18.05.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte). *Fundamentallemma der Variationsrechnung.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ gegeben mit

$$\int_U f\varphi \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Zeigen Sie, dass $f = 0$ fast überall in U.

Aufgabe 14 (4 Punkte). *Distributionelle Ableitungen 1.* Bestimmen Sie die distributionellen Ableitungen $\partial_1 T_f$ für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

Aufgabe 15 (4 Punkte). *Distributionelle Ableitungen 2.* Bestimmen Sie für $\alpha > 1 - n$ die distributionellen Ableitungen $\partial_j T_f$ von $f(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Dirac-Distribution δ_{x_0} nicht als $\delta_{x_0} = T_f$ mit einer Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ geschrieben werden kann.