TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 5

Abgabe: am 24.05.2016 in der Übung

Aufgabe 17 (6 Punkte)**.** Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gegeben und erfülle u die Mittelwertungleichung

$$u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{1}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Zeigen Sie, dass u distributionell subharmonisch ist, das heißt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,(-\Delta\varphi)\,(x)\,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{2}$$

Gehen Sie dafür in mehreren Schritten vor:

(i) Zeigen Sie, dass Funktionen $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, die die Ungleichung (1) erfüllen, bereits subharmonisch im klassischen Sinne sind.

(ii) Sei $\eta \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ nichtnegativ. Zeigen Sie, dass auch $u * \eta$ die Ungleichung (1) erfüllt.

(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii) die Behauptung. Betrachten sie dazu $\eta \in C_c^2(B(0,1))$ nichtnegativ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$ und die zugehörige Diracfolge $(\eta_\delta)_{\delta>0}$, die durch $\eta_\delta(x) = \delta^{-n}\eta(\frac{x}{\delta})$ definiert ist.

Aufgabe 18 (5 Punkte)**.**

(i) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ subharmonisch und sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $u(x) := \max\{u_1(x), u_2(x)\}$. Zeigen Sie, dass dann $-\Delta u \leq 0$ im Distributionssinn gilt (vgl. die Definition in Aufgabe 17).

(ii) Sei $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch. Beweisen Sie, dass $-\Delta|h| \leq 0$ im Distributionssinn gilt.

Aufgabe 19 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $q \in C^0(U)$ und $\phi \in C^0(\partial\Omega)$.

(1) Seien $u_1, u_2 \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &\leq q \quad \text{in } U, & \qquad -\Delta u_2 &\geq q \quad \text{in } U,\\ u_1 &\leq \phi \quad \text{auf } \partial U, & u_2 &\geq \phi \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $u_1 \leq u_2$ in $\overline{U}$.

(2) Sei nun $U \subset B(x_0, R)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$ und $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= q \quad \text{in } U,\\ u &= \phi \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Weiter gebe es reelle Zahlen $m \leq M$ und $k \leq 0 \leq K$ mit

$$\begin{aligned} m \leq \phi &\leq M \quad \text{auf } \partial U,\\ k \leq q &\leq K \quad \text{in } U. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \overline{U}$

$$m + \frac{k}{2n}\left(R^2 - |x - x_0|^2\right) \leq u(x) \leq M + \frac{K}{2n}\left(R^2 - |x - x_0|^2\right).$$