TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 6
Abgabe: am 01.06.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 20 (4 Punkte). *Harnack-Ungleichung.*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset\subset U$ offen und zusammenhängend.

(a) Zeigen Sie, dass die Harnack-Ungleichung ohne die Voraussetzung $u \geq 0$ falsch ist. Geben Sie dazu ein U an, so dass keine Konstante $C = C(n, U, V) > 0$ existiert mit
$$\sup_{x \in V} u(x) \leq C \inf_{x \in V} u(x)$$
für alle $u \in C^2(U)$ mit $\Delta u = 0$.

(b) Leiten Sie eine geeignet modifizierte Harnack-Ungleichung für alle $u \in C^2(U)$ mit $\Delta u = 0$ und $u \leq 0$ in U her.

(c) Geben Sie unter den Voraussetzungen von Satz 3.28 mit der zusätzlichen Bedingung, dass $\inf_V u = 0$ ist, einen alternativen Beweis für die Harnack-Ungleichung an.

Aufgabe 21 (4 Punkte). *Beweis von Satz 3.33 für $k = 0$ und $k = 1$.*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch in U und $B(x, r) \subset U$ für ein $r > 0$, $x \in U$. Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k \in \{0, 1\}$, dass
$$|D^\alpha u|(x) \leq \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x,r))}.$$
<u>Hinweis:</u> Wenden Sie die Mittelwertformel zunächst auf u und dann auf die ersten Ableitungen von u an.

Aufgabe 22 (4 Punkte). *Satz von Liouville.*

(a) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte, harmonische Funktion. Folgern Sie aus Satz 3.32 (vgl. Aufgabe 21), dass u konstant ist. (Verwenden Sie nicht den Satz von Liouville.)

(b) Geben Sie eine nicht-konstante Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ an, die nach unten beschränkt und harmonisch in U ist. Hierbei sei $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $n \geq 3$ und $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0\}$ für $n = 2$.

(c) Es sei $n \geq 3$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Lösung von
$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n.$$
Zeigen Sie, dass $u = N * f + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte). Es sei $n \geq 2$, $u \in C^0(\overline{B(0,1)} \setminus \{0\})$ beschränkt mit
$$-\Delta u = 0 \text{ in } B(0,1) \setminus \{0\}$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial B(0,1).$$
Zeigen Sie, dass $u = 0$ ist.
<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die Hilfsfunktionen $u \pm \varepsilon N$.