TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 7
Abgabe: am 08.06.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und seien $f \in C^0(U) \cap L^1(U)$ sowie $g \in C^0(\partial U)$ gegeben. Betrachten Sie dann das *Neumann*-Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U, \qquad \nabla u \cdot \nu_U = g \quad \text{auf } \partial U, \tag{1}$$

wobei ν_U die äußere Normale von U bezeichnet.

(i) Beweisen Sie, dass eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ von (1) gegeben ist durch

$$\int_U f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} g(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0.$$

(ii) Nehmen Sie an, dass eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ von (1) existiert und dass es für alle $x \in U$ eine Funktion $\phi^x \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ gibt mit

$$-\Delta \phi^x = 0 \quad \text{in } U,$$
$$\nabla \phi^x \cdot \nu_U + \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)} = -\nabla N(\cdot - x) \cdot \nu_U \quad \text{auf } \partial U.$$

Zeigen Sie, dass dann ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in U$

$$u(x) = \int_U G_2(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial U} G_2(x,y) g(y) \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) + c$$

gilt, wobei $G_2(x,y) = N(x-y) + \phi^x(y)$ ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** *Beweis von Lemma 3.40.* Es sei $K : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ der Poissonkern des Halbraums, das heißt

$$K(x,y') = \nabla_y G(x,y) \cdot \vec{e_n} = 2 \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_n}{(x_n^2 + |x'-y'|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ und $y = (y', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
Zeigen Sie, dass für alle $\delta > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\delta}{n\alpha(n)(\delta^2 + |y|^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

und folgern Sie daraus für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x,y')\,\mathrm{d}y' = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\int_{\partial U} \nabla N(x) \cdot \nu(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \;=\; -1$$

für alle beschränkten Gebiete $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand und $0 \in U$. Hierbei bezeichne N das Newton-Potential in $\mathbb{R}^n$ und $\nu(x)$ die äußere Normale von U in $x \in \partial U$. Wenden Sie dieses Resultat dann auf Gebiete der Form $U_R = B^{n-1}(0,R) \times (-\delta,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ an.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie eine Greensche Funktion für den Viertelraum

$$\mathbb{R}^2_{++} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}.$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es eine nichttriviale Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gibt mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+. \tag{2}$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Maximumprinzip?
Beweisen Sie weiterhin, dass $u = 0$ die einzige beschränkte Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ von (2) ist.

Hinweis: Betrachten Sie die antisymmetrische Fortsetzung von u, die durch $\tilde{u}(x) = \operatorname{sgn}(x_n)u(x', |x_n|)$ für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass diese Fortsetzung distributionell harmonisch ist, das heißt dass für die von $\tilde{u}$ induzierte Distribution gilt $\Delta T_{\tilde{u}} = 0$. Folgern Sie daraus die Behauptung.