TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 8
Abgabe: am 14.06.2017 in der Übung

Aufgabe 28. Sei u die eindeutige Lösung von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B(0,1), \qquad u = g \quad \text{auf } \partial B(0,1)$$

zu gegebenem $g \in C^0(\partial B(0,1))$. Zeigen Sie: Falls $g(x', x_n) = -g(x', -x_n)$ für alle $x \in \partial B(0,1)$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, so folgt

$$u(x', x_n) = -u(x', -x_n) \quad \text{für alle } (x', x_n) \in B(0,1).$$

Aufgabe 29. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und eine monoton wachsende Folge $(u_k)_k \subset C^0(U)$ harmonischer Funktionen gegeben. Weiterhin gelte für ein $x \in U$, dass $(u_k(x))_k \subset \mathbb{R}$ konvergiere. Zeigen Sie: Dann konvergiert $(u_k)_k$ lokal gleichmäßig in U gegen eine harmonische Funktion.
Tipp: Verwenden Sie die Harnacksche Ungleichung.

Aufgabe 30. Beweisen Sie die folgende Aussage aus Bemerkung 3.44: Der Poissonkern zu $B(z, r) \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$K^{r,z}(x, y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{r^2 - |x - z|^2}{r|x - y|^n}.$$

Aufgabe 31. Zeigen Sie: Der Poissonkern zu $B(z, r) \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt

$$\int_{\partial B(z,r)} K^{r,z}(x, y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1.$$