TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 9

Abgabe: am 22.06.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 32 (4 Punkte)**.** Die folgende *Méthode de Balayage* geht auf Henri Poincaré zurück. Sei ein beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von offenen Bällen mit $\overline{B_i} \subset U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Definiere für $u \in C^0(U)$ die harmonische Ersetzungen $T_i u$ durch

$$(T_i u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in U \setminus B_i, \\ \int_{\partial B_i} K_i(x,y)u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{für } x \in B_i, \end{cases}$$

wobei K_i den Poissonkern zu B_i bezeichnet.

(i) Sei eine subharmonische Funktion $u_0 \in C^0(\overline{U})$ gegeben. Wir definieren dann iterativ eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\overline{U})$ durch

$$u_{k+1} = (T_{k+1} \circ T_k \circ \cdots \circ T_1)u_k.$$

Zeigen Sie, dass der punktweise Grenzwert $u_\infty := \lim_{k\to\infty} u_k$ existiert und dass u_∞ harmonisch ist.

(ii) Seien nun zusätzlich alle Randpunkte $x_* \in \partial U$ regulär. Zeigen Sie, dass u_∞ dann mit der eindeutigen Lösung $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ des Dirichlet Randwertproblems

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } U, \qquad u = u_0 \quad \text{auf } \partial U$$

übereinstimmt.

Hinweis: Um zu zeigen, dass die punktweise Grenzfunktion in Teil (i) harmonisch ist, betrachten Sie für festes $j \in \mathbb{N}$ die Funktionen $T_j u_k$ und wenden Sie Aufgabe 29 an.

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** *Beweis von Satz 3.56.* Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass das Dirichlet-Problem

$$\text{Finde } u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U}) \text{ mit } -\Delta u = 0 \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial U$$

genau dann für beliebige $g \in C^0(\partial U)$ lösbar ist, wenn alle Randpunkte $x_* \in \partial U$ regulär sind.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Sei eine beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass alle Randpunkte $x_* \in \partial U$ regulär sind.

(i) Seien $f \in C^2_c(U)$ und $g \in C^0(\partial U)$ gegeben. Beweisen Sie die Existenz einer Lösung $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$, so dass

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial U.$$

(ii) Zeigen Sie, dass es eine subharmonische Funktion $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ gibt, so dass $u = 0$ auf ∂U und $u(x) < 0$ für alle $x \in U$ gilt.

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** Geben Sie ein beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ an, das einen nicht regulären Randpunkt $x_* \in \partial U$ besitzt.