TU Dortmund | Sommersemester 2017
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 10
Abgabe: am 29.06.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mittels $\mathbb{C} \ni z \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$ und eine gegebene Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}, \quad f_1(x,y) + if_2(x,y) = f(z).$$

(i) Zeigen Sie: Für $z_0 = x_0 + iy_0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in z_0.
  (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in (x_0, y_0) und erfüllt die *Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0), \qquad \partial_y f_1(x_0, y_0) = -\partial_x f_2(x_0, y_0).$$

(ii) Es sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 harmonisch sind.

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ glatt und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Funktionen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind.

(i) $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ zu $\lambda > 0$.
(ii) $v(x,t) = x \cdot \nabla u(x,t) + 2t\partial_t u(x,t)$.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie (i) für (ii).

Aufgabe 38 (8 Punkte)**.** *Beweis von Lemma 4.5.* Sei

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

der Wärmeleitungskern. Zeigen Sie:

(1) Es gilt $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ mit

$$\partial_t K - \Delta K = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

(2) Für $t > 0$ gilt:
  (a) $K(\cdot, t) = t^{-\frac{n}{2}} K(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}, 1)$.
  (b) $K(\cdot, t) \geq 0$.
  (c) $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$.
  (d) Für alle $r > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} K(x,t)\,\mathrm{d}x \to 0$ für $t \to 0$.

(3) Es gilt $K(\cdot, t) * K(\cdot, s) = K(\cdot, t+s)$ für alle $t, s > 0$.
(4) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $1 \leq q \leq \infty$ und $t > 0$ gilt

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha K(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \begin{cases} C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})} & \text{für } q < \infty, \\ C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2}} & \text{für } q = \infty \end{cases}$$

mit einer Konstanten $C_{k,\alpha} > 0$.

<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie in Teil (4) zunächst, dass es genügt $k = 0$ und $t = 1$ zu betrachten. Beweisen Sie die Ungleichung in diesem Spezialfall für $q = 1$ und $q = \infty$ und folgern Sie daraus durch Interpolation die Ungleichung für alle $1 \leq q \leq \infty$.