TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen

Blatt 11

Abgabe: am 06.07.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie Funktionen $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Form $u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$ mit einer Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle v, für die u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

ist.

Geben Sie nun das v an, für das der Wärmeleitungskern als $K(x,t) = \partial_x u(x,t) = \partial_x \left(v \left(\frac{x^2}{t} \right) \right)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 40 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie den Wärmeleitungskern

$$K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

und eine Funktion $g \in C_c^0(B(0,1))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und $g \geq 0$. Definieren Sie

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass es ein von g unabhängiges $M > 0$ gibt, so dass

$$\lim_{t\to\infty} \int_{B(0,M\sqrt{t})} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ ein $R(t) > 0$ existiert, so dass

$$\int_{B(0,R(t))} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Beweisen Sie weiter, dass es von g unabhängige Konstanten $0 < c_1 < c_2$ und $t_0 > 0$ gibt mit

$$c_1\sqrt{t} < R(t) < c_2\sqrt{t} \qquad \text{für alle } t > t_0.$$

Aufgabe 41 (6 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand gegeben und sei $u \in C^2(\overline{U_T})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{in } U \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial U \times [0,T]. \end{aligned}$$

Sei weiter

$$E(t) := \int_U u(x,t)^2\,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$E'(t) \leq 0, \quad E''(t) \geq 0, \quad E'(t)^2 \leq E(t)E''(t).$$

(ii) Zeigen Sie, dass $f(t) := \log E(t)$ konvex ist auf $\{t > 0 : E(t) > 0\}$.

(iii) Beweisen Sie, dass

$$E(t) \;\geq\; E(0)e^{f'(0)t}$$

für alle $t > 0$ gilt. Insbesondere fällt E höchstens exponentiell ab, falls $E(0) > 0$.

(iv) Es gelte nun zusätzlich $u = 0$ auf $U \times \{T\}$. Zeigen Sie, dass $u = 0$ in $\overline{U_T}$.