TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 12
Abgabe: am 13.07.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 43 (6 Punkte)**.** Sei

$$K(x,t) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

der Wärmeleitungskern.

(i) Zu gegebenem $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) g(y) \,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$|\hat{u}(\xi,t)| \le C e^{-t|\xi|^2} \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

gilt, wobei $\hat{}$ die Fouriertransformation bezeichnet.

(ii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $b > 0$ und gelte $|\hat{f}(\xi)| \le e^{-b|\xi|}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f dann eine komplex analytische Fortsetzung F hat auf $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < b\}$ (insbesondere ist f damit reell analytisch). Sei nun $0 < a < b$. Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$, $|y| < a$

$$|F(x+iy)| \le \frac{C}{b-a}.$$

(iii) Sei u wie in (i) und $n = 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto u(x,t)$ reell analytisch ist für alle $t > 0$.

Aufgabe 44 (6 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, für das jeder Randpunkt $x_* \in \partial U$ regulär ist. Weiter sei $f \in C^2_c(U)$ gegeben mit $f \ge 0$. Sei $u \in C^{2,1}(\bar{U} \times [0,\infty))$ mit $\partial_t u \in C^{2,1}(U \times (0,\infty))$ Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{auf } U \times (0,\infty), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_\infty = \big(U \times \{0\}\big) \cup \big(\partial U \times [0,\infty)\big). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass dann

$$u_\infty := \lim_{t\to\infty} u(\cdot,t) \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$$

existiert und mit der eindeutigen Lösung $\bar{u} \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ von

$$-\Delta \bar{u} = f \quad \text{in } U, \qquad \bar{u} = 0 \quad \text{auf } \partial U$$

übereinstimmt. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt

$$\bar{u} \ge 0, \qquad \int_U |\nabla \bar{u}(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le \|f\|_{C^0(\overline{U})} \|\bar{u}\|_{C^0(\overline{U})} |U|,$$
$$0 \le u(\cdot,t) \le \bar{u}(\cdot) \quad \text{für alle } t > 0,$$
$$\partial_t u(\cdot,t) \ge 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

(ii) Für alle $x \in U$ existiert $u_\infty(x) := \lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

(iii) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass die so konstruierte Grenzfunktion $u_\infty \in C^2(U)$ ist und dass für alle $\Omega \subset U$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$ gilt

$$u(\cdot, t) \to u_\infty \qquad \text{in } C^2(\bar{\Omega}).$$

Folgern Sie, dass für solche Ω dann

$$\Delta v(\cdot, t) \to \Delta u_\infty + f \qquad \text{in } C^0(\bar{\Omega})$$

für $t \to \infty$ gilt, wobei $v(x,t) := u(x,t) - \bar{u}(x)$.

(iv) Für alle $T > 0$ ist

$$2 \int_0^T \int_U (\Delta v)^2(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_U |\nabla \bar{u}|^2(x) \, \mathrm{d}x - \int_U |\nabla v(x,T)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

(v) Es gilt

$$-\Delta u_\infty = f \quad \text{ in } U.$$

(vi) Es ist $u_\infty \in C^0(\overline{U})$ und $u_\infty = 0$ auf ∂U. Insbesondere gilt $u_\infty = \bar{u}$.

Hinweise: Für die letzte Aussage in (i) überlegen Sie sich, welche Differentialgleichung $\partial_t u$ erfüllt. In (iv) betrachten Sie $d/dt \int_U |\nabla v(\cdot, t)|^2$ (vergleiche auch Aufgabe 41).

Aufgabe 45 (4 Punkte).

(i) Finden und vergleichen Sie die Lösungen der folgenden Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung beziehungsweise für die Wellengleichung,

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{in } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= \sin kx && \text{für alle } x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && \text{für alle } t > 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 v - \Delta v &= 0 && \text{in } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ v(x,0) = \sin kx, \quad \partial_t v(x,0) &= 0 && \text{für alle } x \in (0,\pi), \\ v(0,t) = v(\pi,t) &= 0 && \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

(ii) Berechnen Sie die Lösung der folgenden inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u - \Delta u &= f && \text{in } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) &= 0 && \text{für alle } x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && \text{für alle } t > 0, \end{aligned}$$

wobei $f(x,t) = (\sin \omega t)(\sin kx)$, $\omega \neq k$. Was passiert für $\omega = k$?

Hinweis: Benutzen Sie als Ansatz eine Separation der Variablen. Bestimmen Sie in (ii) zuerst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und erfüllen Sie danach die Anfangsbedingungen durch die Addition einer Lösung der homogenen Gleichung.