TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
M.Sc. Nils Dabrock

Sommersemester 2017

Klassische Theorie der partiellen Differentialgleichungen
Blatt 13
Abgabe: am 20.07.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 46 (6 Punkte)**.**

(i) Gibt es für alle $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ von
$$\partial_t^2 u - \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
mit
$$u, \nabla u, \partial_t u, \partial_{x_i}\partial_t u, \partial_{x_i}\partial_{x_j} u, \partial_t^2 u \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \tag{1}$$
für alle $i, j = 1, ..., n$? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(ii) Existiert für beliebiges $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ mit (1) von
$$\partial_t^2 u + \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}?$$

(iii) Existiert für beliebiges $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ von
$$\partial_t^2 u + \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}?$$

Hinweis: Betrachten Sie in (i) und (ii) die Fouriertransformation bezüglich der Raum-Zeit Variablen (x, t).

Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wellengleichung und die Wärmeleitungsgleichung,
$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{in } U \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x) \quad \text{für alle } x \in U,$$
$$u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial U, t > 0,$$
beziehungsweise
$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } U \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in U,$$
$$u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial U, t > 0.$$
Folgt jeweils aus $g \geq 0$, dass $u \geq 0$ ist?

Aufgabe 48 (6 Punkte)**.** *Charakteristische Parallelogramme.* Wir nennen ein Parallelogramm mit Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ ein charakteristisches Parallelogramm der Wellengleichung, falls $b - a = c - d = \lambda(1,1)^T$ und $d - a = c - b = \mu(-1,1)^T$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)$ genau dann eine Lösung der Wellengleichung
$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$
ist, falls für jedes charakteristische Parallelogramm mit Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ die folgende Identität gilt:
$$u(b) - u(a) = u(c) - u(d).$$
Benutzen Sie hierfür nicht die d'Alembertsche Formel.