Prof. Dr. M. Röger
Klaas Poelstra

Wintersemester 2017/18
18.10.2017

Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen

Blatt 1

Abgabe am 25.10.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 1.

Sei $n \geq 2$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $\emptyset \neq V \Subset U$. Zu $f \in L^2(U)$ sei $u \in H_0^1(U)$ die eindeutige Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U.$$

Zeigen Sie: Für jedes $K > 0$ existiert ein $f \in C_c(U) \subset L^\infty(U)$, sodass

$$\|D^2 u|_V\|_{L^\infty(V)} > K\|f\|_{L^\infty(U)}.$$

Hinweis: Falls $0 \in V$ *und* $B_{2r} \subset U$*, nutzen Sie als einen Baustein zur Konstruktion von* u *Funktionen vom Typ* $v_k = 2^{-2k}v(2^k x)$ *mit* $v = \eta w$*,* $w(x) = x_1^2 - x_2^2$*, und* $\eta \in C_c^\infty(B_{2r})$ *mit* $\eta|_{B_r} \equiv 1$*.*

Aufgabe 2 (Beweis von Satz 2.5 aus der Vorlesung).

Sei $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ Lösung von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

mit $A \in L^\infty(U; \mathbb{R}^{n\times n})$ gleichmäßig elliptisch. Beweisen Sie:

(i) Falls $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 < \infty$, so ist u konstant.

(ii) Falls $n = 2$ und u beschränkt ist, so ist u konstant.