Prof. Dr. M. Röger
Klaas Poelstra

Wintersemester 2017/18
22.11.2017

Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen

Blatt 3

Abgabe beim Übungsleiter bis zum 27.11.2017
(Raum 642 oder Ablagefach gegenüber von Raum 635)

Aufgabe 1 (Beweis von Bemerkung 4.4 aus der Vorlesung).
Es seien gegeben:

- $B = B(x_0, R)$, $B' = B(x_0, \theta R) \subset \mathbb{R}^n$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ und $0 < \theta < 1$,
- $f \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(B; \mathbb{R}^n)$ und $g \in L^{2,\lambda-2}(B)$, wobei $0 < \lambda < n+2$, und
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine c_0-elliptische Matrix.

Sei dann $u \in H^1(B)$ eine schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = \nabla \cdot f + g.$$

Zeigen Sie, dass $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(B')$ mit

$$[\nabla u]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(B')} \leq \frac{C}{c_0^2}[f]^2_{\mathcal{L}^{2\lambda}(B)} + C[g]^2_{L^{2,\lambda-2}(B)} + CR^{-\lambda}\int_B |\nabla u - (\nabla u)_B|^2$$

für ein $C = C(n, \theta, \lambda, \frac{|A|}{c_0})$. Hierbei sei für $0 < \lambda < 2$ und $U \subset \mathbb{R}^n$

$$L^{2,\lambda-2}(U) := L^2(U),$$
$$[g]^2_{L^{2,\lambda-2}(U)} := (\operatorname{diam} U)^{2-\lambda}\int_U |g|^2.$$

Aufgabe 2 (Beweis von Satz 4.5 aus der Vorlesung).
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine c_0-elliptische Matrix. Beweisen Sie:

(1) Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ existiert eine schwache Lösung $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = -\nabla \cdot f$$

mit $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Eine solche Lösung ist eindeutig bis auf Addition von Konstanten, und es gilt

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{c_0^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

(2) Sei $0 < \lambda < n+2$. Zu $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ mit $[f]_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ existiert eine schwache Lösung $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = -\nabla \cdot f.$$

Eine solche Lösung ist eindeutig bis auf Addition affiner Funktionen, und es gilt

$$[\nabla u]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C[f]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

für eine Konstante $C = C(n, \lambda, \frac{|A|}{c_0})$.