Prof. Dr. M. Röger
Klaas Poelstra

Wintersemester 2017/18
06.12.2017

Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen

Blatt 4

Abgabe beim Übungsleiter bis zum 11.12.2017
(Raum 642 oder Ablagefach gegenüber von Raum 635)

Aufgabe 1 (Beweis von Folgerung 4.9 aus der Vorlesung).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 < \alpha < 1$, sowie

$$f \in C^{1,\alpha}(U;\mathbb{R}^n), \quad g \in C^{0,\alpha}(U), \quad A \in C^{1,\alpha}(U;\mathbb{R}^{n\times n})$$

mit A gleichmäßig elliptisch. Wenn $u \in H^1(U)$ eine schwache Lösung von

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) = -\nabla \cdot f + g \quad \text{in } U$$

ist, so gilt $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma 4.12 aus der Vorlesung).
Sei $0 < \lambda < n$ und $R > 0$, sowie

$$B_R^+ = B(0,R) \cap \{x_n > 0\}, \quad f \in L^{2,\lambda}(B_R^+), \quad A \in C^0(\overline{B_R^+};\mathbb{R}^{n\times n})$$

mit A gleichmäßig elliptisch. Wenn $u \in H^1(B_R^+)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u) = -\nabla \cdot f & \text{in } B_R^+ \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{auf } \partial B_R^+ \cap \{x_n = 0\} \end{cases}$$

ist, so gilt für alle $0 < r \le R$ die Abschätzung

$$\int_{B_r^+} |\nabla u|^2 \le C r^\lambda \left([f]^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(B_R^+)} + R^{-\lambda} \int_{B_R^+} |\nabla u|^2 \right).$$