Prof. Dr. M. Röger
Klaas Poelstra

Wintersemester 2017/18
22.12.2017

Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen

Blatt 5

Abgabe beim Übungsleiter bis zum 08.01.2018
(Raum 642 oder Ablagefach gegenüber von Raum 635)

Aufgabe 1 (Koerzivität impliziert die Legendre-Hadamard-Bedingung).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $A \in L^\infty(U; \mathbb{R}^{n\times n}_{N\times N})$ koerziv in dem Sinne, dass

$$\int_U A^{\alpha\beta}_{ij} \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j \geq c_0 \int_U |\nabla u|^2 \tag{C}$$

für ein $c_0 > 0$ und alle $u \in H^1_0(U; \mathbb{R}^N)$. Zeigen Sie, dass A die Legendre-Hadamard-Bedingung erfüllt, also

$$A^{\alpha\beta}_{ij}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \zeta^i \zeta^j \geq c_0 |\xi|^2 |\zeta|^2 \tag{LH}$$

für fast alle $x \in U$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n,\ \zeta \in \mathbb{R}^N$. Folgern Sie, dass im Fall $N = 1$

$$\text{(L)} \iff \text{(C)} \iff \text{(LH)}$$

gilt, wobei (L) die Legendre-Bedingung ist.

Hinweis: Setzen Sie für einen Lebesguepunkt $x_0 \in U$ von A die Funktionen

$$u_{\tau,\eta}(x) = \phi_\eta(x - x_0)\zeta e^{i\tau x\cdot\xi}$$

in die Bedingung (C) *ein, wobei $(\phi^2_\eta)_{\eta>0}$ eine Dirac-Folge ist. Bilden Sie nacheinander die Grenzwerte für $\tau \to \infty$ und $\eta \to 0$.*

Aufgabe 2 (Schauder-Abschätzungen für Systeme in Nichtdivergenzform).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 < \alpha < 1$. Weiter sei $A \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(U; \mathbb{R}^{n\times n}_{N\times N})$ und erfülle (LH) mit einer Konstanten $c_0 > 0$. Sei nun $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$ eine schwache Lösung von

$$A^{\alpha\beta}_{ij} \partial^2_{\alpha\beta} u^j = f_i$$

für ein $f \in \mathcal{L}^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(U; \mathbb{R}^N)$, wobei $0 < \lambda \leq n + 2\alpha$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{D}^2 u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(U)$.