Prof. Dr. M. Röger
Klaas Poelstra

Wintersemester 2017/18
12.01.2018

Regularitätstheorie elliptischer Gleichungen

Blatt 6

Abgabe beim Übungsleiter bis zum 22.01.2018
(Raum 642 oder Ablagefach gegenüber von Raum 635)

Aufgabe 1 (Eigenschaften schwacher L^p-Räume).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < q < \infty$.

(i) Zeigen Sie, dass
$$L^q(U) \subset L^q_w(U) \subset L^p(U),$$
falls U beschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$L^p_w(U) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sup_{t>0} t|\{|f| > t\}|^{1/p}$$
keine Norm auf $L^p_w(U)$ definiert.

Aufgabe 2 (Eigenschaften von Maximal- und Sharp-Funktionen).

(i) Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass aus $\mathcal{M}^\Delta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ schon $f = 0$ folgt.

(ii) Zeigen Sie für
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$
dass $f^\#_\Delta$ beschränkt ist und $f^\#$ unbeschränkt, wobei
$$f^\#(x) = \sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}| \,\mathrm{d}y$$
die gewöhnliche (nicht dyadische) Sharp-Funktion ist.

Aufgabe 3.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^p(U)$ für ein $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in U$ gilt:
$$\fint_{Q_k} |f - f(x)|^p \to 0 \quad (k \to \infty)$$
für jede Folge $Q_k \in \mathcal{M}_k(x) = \{Q \in \mathcal{M}_k \mid x \in Q\}$.

Anleitung. Reduzieren und lösen Sie das Problem in folgenden Schritten:

(i) Es reicht, $|A_t| = 0$ zu zeigen, wobei

$$A_t = \{x \mid \limsup_{k\to\infty} \fint_{Q_k} |f - f(x)|^p > t\}, \quad t > 0.$$

(ii) Wir können durch ein Approximationsargument annehmen, dass $\|f\|_{L^p}^p \leq t\epsilon$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$.

(iii) Zeigen Sie

$$A_t \subset \{\mathcal{M}^\Delta |f|^p > t2^{-p}\} \cup \{|f|^p > t2^{-p}\}$$

und finden Sie eine Abschätzung für das Maß der rechten Seite.