Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 13. Juli 2017

Topologie

Beweis zum Lemma von Urysohn

Beweis. In einem T_4-Raum gibt es zu jeder abgeschlossenen Menge C und jeder offenen Menge U mit $C \subset U$ stets eine offene Menge V mit $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
Aus der Menge

$$D = \left\{ \tfrac{p}{2^k} : p\,,\ k \in \mathbb{N}\,,\ 0 \le p \le 2^k \right\}$$

bilden wir die Folge

$$F = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots \right) .$$

Wir wählen offene Mengen G_0, G_1, sodass $A \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset X \setminus B$. Jeder weiteren Zahl $d \in D$ ordnen wir induktiv nach Folgengliedern eine offene Menge G_d zu, sodass für $d < d'$ gilt $\overline{G}_d \subset G_{d'}$. Allen Zahlen d von D, die in der Folge vor $b = (2p{+}1)\cdot 2^{-n}$ stehen, seien bereits offene Mengen G_d zugeordnet mit $\overline{G}_d \subset G_{d'}$, wenn d, d' vor b stehen und $d < d'$ ist. Unter den vor b stehenden Gliedern der Folge F ist $a = p \cdot 2^{-n+1}$ bzw. $c = (p{+}1)\cdot 2^{-n+1}$ die von b aus gesehen nächst kleinere bzw. nächst größere Zahl bezüglich der Relation $<$. Dann wähle eine offene Menge G_b mit $\overline{G}_a \subset G_b \subset \overline{G}_b \subset G_c$.
Für $t \in [0,1]$ sei $G_t := \bigcup \{ G_d : d \in D,\ d \le t \}$. Dann ist G_t offen, und für $t < t'$ gilt $\overline{G}_t \subset G_{t'}$. Nun definieren wir $f\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \inf \{ t \in \mathbb{R} : x \in G_t \} & \text{für } x \in G_1\,, \\ \qquad 1 & \text{für } x \notin G_1\,. \end{cases}$$

Dann gilt $0 \le f(x) \le 1$ für $x \in X$, $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.
Somit bleibt nur noch die Stetigkeit von f zu zeigen. Dazu sei $G_t := \emptyset$ für $t < 0$ und $G_t := X$ für $t > 1$. Für $x_0 \in X$ und $0 < \delta < \varepsilon$ gilt $x_0 \in U := G_{f(x_0)+\varepsilon-\delta} \setminus G_{f(x_0)-\varepsilon} \subset f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon))$ und U ist offen. Also ist f stetig in x_0. $\square$