ERGÄNZUNG ZU ÜBUNG 2, 11.ÜBUNGSBLATT

Sei X eine linear geordnete Menge mit der Ordnungstopologie. Seien A, B absgeschlossene disjunkte Teilmengen von X.
Sei $S_a = \{x \in X \mid [x, a] \cup [a, x] \subset X \setminus B\}$ für alle $a \in A$.

Beobachtung 1. Zu jedem $b \in B$ existiert eine Umgebung W von b, die mit höchstens zwei der Menge S_a einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt.

Beweis. Sei $b \in B$ und b nicht der Endpunkt von X. Da $A \cap B = \emptyset$, existiert ein $x \in X$ mit $b < x$ und $[b, x) \cap A = \emptyset$.
Nun nehmen wir an dass, die Menge $[b, x)$ einen nicht-leeres Durchschnitt mit zwei der Menge S_a hat. Also, seien $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 < a_2$ und seien s_1, s_2 so dass $s_1 \in S_{a_1} \cap [b, x)$ und $s_2 \in S_{a_2} \cap [b, x)$. Daher gilt $b < s_2$ und $b < s_1$.
Falls $a_i < b < s_i$, ist $b \in [a_i, s_i] \subset S_{a_i}$, aber $S_{a_i} \subset X \setminus B$, so kann das nicht passieren und gilt $b < s_i < a_i$ $(i = 1, 2)$. Daher gilt sogar $b < s_2 < a_1 < a_2$ und somit $a_1 \in S_{a_1} \cap S_{a_2}$. Es folgt $S_{a_1} = S_{a_2}$, d.h. $[b, x)$ kann nur mit höchstens einer der Menge S_a einen nicht-leeren Durchschnitt haben.
Entsprechender, falls b nicht Anfangspunkt von X ist, gibt es ein $y < b$ für das $(y, b]$ mit höchstens einer der Mengen S_a einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt. Dann ist (y, x) eine Umgebung von b mit der richtigen Eigenschaft.
Ist b Anfangs- oder Endpunkt von X, so ist statt (y, x) die Umgebung $[b, x)$ bzw. $(x, b]$ zu verwenden. □

Beobachtung 2. Zu jeder Menge S_a gibt es eine offene Menge T_a mit $A \cap S_a \subset T_a \subset S_a$ und $B \subset X \setminus \overline{T_a}$.

Beweis. Aus $x \in S_a$ und die Konvexität der Menge S_a folgt die Existenz eines offenen Intervals $J \ni x$ so dass $J \subset X \setminus B$. Also, sei $p \in J$, dann $[a, p] \cup [p, x] \subset [a, x] \cup [x, a] \subset X \setminus B$. Es folgt $J \subset S_a$. Daher ist S_a eine offene Menge.
Falls $x \in S_a$ mit $A \cap S_a \subset (-\infty, x)$, setzen wir $M_a := S_a \cap (-\infty, x)$. Anderenfalls, setzen wir $M_a := S_a$.
Falls $y \in S_a$ mit $A \cap S_a \subset (y, +\infty)$, setzen wir $N_a := S_a \cap (y, +\infty)$. Anderenfalls, setzen wir $N_a := S_a$.
Die Menge $T_a = M_a \cap N_a$ ist offen und offenbar haben wir $A \cap S_a \subset T_a \subset S_a$.
Nun, sei $b \in B$ mit $a < b$. Da $b \notin A$, existiert ein $z \in X$ so dass $(z, b] \cap A = \emptyset$. Wenn daher $b \in \overline{S_a}$, $z \in S_a$ und $A \cap S_a \subset (-\infty, z)$. Es folgt $M_a \subset S_a \cap (-\infty, x)$ für ein $x \in S_a$. Aus $b \leq x$ folgt $b \in [a, x] \subset S_a \subset X \setminus \overline{B} = X \setminus B$, das ein Widerspruch ist. Daher ist $(x, +\infty)$ eine Umgebung von b mit $(x, +\infty) \cap T_a = \emptyset$. In jedem Fall gilt daher $b \in X \setminus \overline{T_a}$.
Entsprechend schliesst man, wenn $b < a$ vorausgesetzt wird.

□