LÖSUNGEN ZUM ÜBUNGSBLATT 3, ÜBUNGEN 2 UND 3(B)

Übung 2:

(a) Wir konstruiren eine Teilmenge N von M durch Induktion. Da M unendlich ist, ist $M \neq \emptyset$ und so existiert $x_1 \in M$. Jetzt, wir betrachten $M \setminus \{x_1\}$, die nochmal unendlich und nicht leer ist. Es folgt dass ein punkt $x_2 \in M \setminus \{x_1\}$ existiert. Nun, machen wir gleich mit $M \setminus \{x_1, x_2\}$ und so finden wir x_3. Dann, ist die Menge $N = \{x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ and } x_{n+1} \in M \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}\}$ eine abzählbare unendliche Teilmenge von M.

(b) Falls M endlich ist, dann kann keine Teilmenge $N \subset M$ echte Teilmenge gleicher Mächtigkeit als M existieren. So: wenn eine echte Teilmenge N von M gliecher Mčhtigkeit existiert, dann M ist unendlich.

Um die andere Richtung zu beweisen, sollen wir eine bijektive Funktion zwischen $M_1 \subset M$ und M definieren. Wegen Teil (a), existiert $N = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ echte Teilmenge von M und abzählbar. Betrachten wir auch die Teilmenge $N_1 = \{x_{2n} \in N \mid n \in \mathbb{N}\}$. Offensichtlich, haben N_1 und N glieche Mächtigkeit und es folgt, eine bijektive Funktion $f : N_1 \to N$ existiert. Jetzt, setzen wir $M_1 = (M \setminus N) \cup N_1$ und wir definieren $g : M \to M_1$ durch $g(x) = f(x)$ falls $x \in N - 1$ und $g(x) = x$ falls $x \in M \setminus N$. Die Funktion g ist wohldefiniert und bijektiv.

Zur Injektivität: sei $x, y \in M_1$ mit $x \neq y$. Falls $x, y \in N_1$, $f(x) \neq f(y)$ und so auch $g(x) \neq g(y)$. Falls $x, y \in M \setminus N$, da $x \neq y$, $g(x) \neq g(y)$. Falls $x \in N - 1$ und $y \in M \setminus N$, $f(x) \neq y$, da $f(x) \in N$ und es folgt $g(x) \neq g(y)$.

Zur Surjektivität: sei $yinM$. Ist $x \in M \setminus N$, setzen wir $x := y$. Dann $g(x) = x = y$. Ist $y \in N$, setzen wir $x = f^{-1}(y)$ und es gilt $g(x) = f(x) = y$.

(c) Wir folgen die gleiche Strategie als im Teil (b). Da M überabzählbar ist und A abzählbar ist, ist $M \setminus A$ unendlich und nach (a) folgt die Existenz einer abzählbaren echten Teilmenge B von $M \setminus A$. Da $A \cup B$ B abzählbar sind, existiert $f : B \to A \cup B$ bijektiv. Jetzt, definieren wir $g : M \setminus A = (M \setminus (A \cup B)) \cup B \to M$ durch $g(x) = f(x)$ falls $x \in B$ und $g(x) = x$ falls $x \in M \setminus (A \cup B)$. Bijektivität der Funktion g folgt als in (b).

Übung 3(b):

Sei $M' = \{$ Häufungspunkten von $M\}$ und wir nehmen an dass M' nur abzählbar ist. Jetzt, betrachten wir $M_k = [-k, k] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{1/k}(x_m)$, $x_m \in M'$, die höchstens endliche viele Elementen von M enthält. Außerdem, $M \setminus M' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \mathbb{R} \setminus M'$. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist und M abzählbar ist, ist $\mathbb{R} \setminus M'$ unendlich. Da $M \subset (M \setminus M') \cup M'$, ist M' höchstens abzählbar, was ein Widerspruch ist.