LÖSUNGEN ZUM ÜBUNGSBLATT 4, ÜBUNGEN 1 UND 2 (B)-(C)

Übung 1:

(a) Es gilt: $\overline{E \cap F} \subset \overline{E} \cap \overline{F}$. Zum Beweis: sei $x \in \overline{E \cap F}$. Dann gilt $U \cap (E \cap F) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Wegen die Eigenschaften von der Durchschnitt, folgt es (1) $(U \cup E) \cup F \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \; U \cup E \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Rightarrow x \in \overline{E}$, und (2) $(U \cup F) \cup E \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \; U \cup F \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Rightarrow x \in \overline{F}$. Es bedeutet, $x \in \overline{E} \cup \overline{F}$.

(b) Ähnlich, gilt nur $\overline{\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in A} \overline{E_\alpha}$. Die Idee zum Beweis ist ähnlich zum Teil (a).

(c) Es gilt $\overline{E} \setminus \overline{F} \subset \overline{E \setminus F}$. Falls $x \notin \overline{E \setminus F}$, dann existiert eine $U \in \mathcal{U}(x)$ so dass $U \cap (E \setminus F) = \emptyset$. Da $\emptyset = U \cap (E \setminus F) = (U \cap E) \setminus (U \cap F)$, hat man $U \cap E \subset U \cap F$. Falls $x \notin \overline{F}$, dann existiert eine $V \in \mathcal{U}(x)$ so dass $V \cap F = \emptyset$. Setze man $W = U \cap V \in \mathcal{U}(x)$, dann gilt $W \cap E = V \cap (U \cap E) \subset V \cap (U \cap F) = W \cap F = \emptyset$, d.h. $W \cap E = \emptyset$ und $x \notin \overline{E}$. Das ergibt: $x \in \overline{E} \setminus \overline{F} \; \Rightarrow \; x \in \overline{E \setminus F}$.

(d) Es gilt $(E \cup F)' = E' \cup F'$. Zum Beweis: $x \in (E \cup F)' \; \Leftrightarrow \; U \cap ((E \cup F) \setminus \{x\}) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Leftrightarrow (U \cap (E \setminus \{x\})) \cup (U \cap (F \setminus \{x\})) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Leftrightarrow \; (U \cap (E \setminus \{x\})) \neq \emptyset$ oder $(U \cap (F \setminus \{x\})) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Leftrightarrow \; x \in E'$ oder $x \in F' \; \Leftrightarrow x \in E' \cup F'$.

(e) Es gilt $(E \cup F)' \subset E' \cap F'$. Zum Beweis: sei $x \in (E \cap F)'$, dann $U \cap ((E \cap F) \setminus \{x\}) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Rightarrow U \cup ((E \setminus \{x\}) \cup (F \setminus \{x\})) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Rightarrow U \cup (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ und $U \cup (F \setminus \{x\}) \neq \emptyset \; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \; \Rightarrow x \in E' \cap F'$.

Übung 2:

(b) Falls E offen ist, dann gilt $E = E^\circ$. Da $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ (Teil (a)), folgt es: $E \cap \partial E = E^\circ \cap (\bar{E} \setminus E^\circ) = \emptyset$. Falls $E \cap \partial E = \emptyset$, dann gilt $E^\circ \cap (\bar{E} \setminus E^\circ) = \emptyset$ und es ergibt $E \subset E^\circ$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $x \in E^\circ = \bigcup\{U \in \tau \mid U \subset E\}$. Es folgt sofort dass, $x \in E$, d.h. $E^\circ \subset E$. Da $E = E^\circ$, ist E offen.

(1c) Falls E abgeschlossen ist, dann gilt $E = \bar{E} = E \cup \partial E$, wobei die zweite Gleicheit von Teil (a) folgt, und so $\partial E \subset E$. Falls $E \subset \partial E$, hat man $\bar{E} = \partial E \cup E = E$, d.h. E abgeschlossen ist.

(2c) Falls E abgeschlossen ist, dann gilt $E = \bar{E} = E \cup E'$, wobei die zweite Gleicheit von Teil (a) folgt, und so $E' \subset E$. Falls $E \subset E'$, hat man $\bar{E} = E' \cup E = E$, d.h. E abgeschlossen ist.