Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 27. Juli 2017

Topologie

Dieser Abschnitt ist nicht mehr prüfungsrelevant.

6.4 Kompaktifizierung vollständig regulärer Räume

Definition 6.4.1 . Es seien X ein topologischer Raum, Y ein kompakter Raum und $f\colon X \to Y$ eine Einbettung von X auf einen dichten Unterraum von Y. Dann heißt (f, Y) eine *Kompaktifizierung* von X.

Eine Kompaktifizierung $\beta X = (\beta, \beta X)$ von X heißt *Stone-Čech-Kompaktifizierung*, wenn sie folgende Eigenschaft $(\mathscr{K})$ besitzt:

$(\mathscr{K})$ Zu jedem kompakten Hausdorffraum Y und jeder stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $F\colon \beta X \to Y$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\exists!\ F"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die Einpunktkompaktifizierung hat im Allgemeinen nicht die Eigenschaft $(\mathscr{K})$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Es sei $X = (0,1]$ und $f\colon X \to [-1,+1]$ die Abbildung mit $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Diese Abbildung lässt sich nicht auf die Einpunktkompaktifizierung $\widehat{X} = [0,1]$ von X fortsetzen.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist, dass X vollständig regulär ist. Diese ist aber auch hinreichend.

Satz 6.4.2 (Stone und Čech, 1937)**.** *Es sei X ein vollständig regulärer Raum. Dann existiert eine Stone-Čech-Kompaktifizierung $(\beta, \beta X)$ von X. Ist $(\beta', \beta' X)$ eine weitere Stone-Čech-Kompaktifizierung von X, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $h\colon \beta X \to \beta' X$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\exists!\ h"] \\ & \beta' X\,. \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Den Beweis skizzieren wir nur. Es sei $C_b(X)$ die Menge der stetigen, beschränkten Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Für jedes $\varphi \in C_b(x)$ liegt das Bild $\varphi(X)$ in einem minimalen kompakten Intervall $I_\varphi \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$e\colon X \to \prod_{\varphi \in C_b(X)} I_\varphi\,, \quad e(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in C_b(X)}$$

eine Einbettung. Der Abschluss

$$\beta X := \overline{e(X)} \subset \prod_{\varphi \in C_b(X)} I_\varphi$$

von $e(X)$ im Produktraum ist komppakt nach dem Satz von TICHONOW, $\beta\colon X \to \beta X$, $x \mapsto (\varphi(x))_{\varphi \in C_b(X)}$ ist eine Einbettung und $\beta(X)$ liegt dicht in βX, d.h. $(\beta, \beta X)$ ist eine Kompaktifizierung. Nun zeigt man noch die Eigenschaft $(\mathscr{K})$ und die Eindeutigkeit.

Damit man eine Vorstellung von der Größe der Stone-Čech-Kompaktifizierung bekommt, erwähnen wir ohne Beweis, dass die Mächtigkeit von $\beta\mathbb{N}$ gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist. Mit Hilfe von Kardinalzahlen kann man dieses Ergebnis folgendermaßen ausdrücken: Es ist $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, wobei $\mathfrak{c}$ die Kardinalzahl des Kontinuums, also $\mathbb{R}$ ist.

Es gibt aber auch Fälle, in denen die Stone-Čech-Kompaktifizierung mit der Einpunktkompaktifizierung übereinstimmt. Zum Beispiel ist $\widehat{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \{\omega_1\} = \Omega = \beta\Omega_0$.

Man fragt sich sicherlich, wozu diese Kompaktifizierung benötigt wird. Ist X ein vollständig regulärer Raum, so kann man die Stone-Čech-Kompaktifizierung mit dem Spektrum von $C_b(X)$ identifizieren. Es ist $C_b(X)$ mit der Supremumsnorm eine *kommutative C^*-Algebra* (eine Banachalgebra mit Involution). Das *Spektrum* $\widetilde{X}$ ist die Menge der multiplikativen Funktionale mit der Teilraumtopologie der schwach*-Topologie des Dualraums $(C_b(X))'$ von $C_b(X)$; man beachte $\widetilde{X} \subset (C_b(X))'$. Für jedes $x \in X$ ist $\delta_x\colon C_b(X) \to \mathbb{C}$ mit $\delta_x(f) := f(x)$ ein multiplikatives Funktional. Identifiziert man $x \in X$ mit $\delta_x \in \widetilde{X}$, so erhält man $X \subset \widetilde{X}$, und man kann zeigen, dass $\widetilde{X}$ homöomorph zur Stone-Čech-Kompaktifizierung βX ist.