

Was ist Topologie und wer hat sie erfunden?

Die folgenden Ausführungen stammen im Wesentlichen aus Wikipedia.

Die Topologie (griechisch: $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$, $t\acute{o}pos$, deutsch: „Ort, Platz“ und -logie) ist ein fundamentales Teilgebiet der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften mathematischer Strukturen, die unter stetigen Verformungen erhalten bleiben, wobei der Begriff der Stetigkeit durch die Topologie in sehr allgemeiner Form definiert wird. Die Topologie ging aus den Konzepten der Geometrie und Mengenlehre hervor.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts entstand die Topologie als eine eigenständige Disziplin, die auf lateinisch *geometria situs* „Geometrie der Lage“ oder *analysis situs* (Griechisch-Latein für „Analysieren des Ortes“) genannt wurde.

Seit Jahrzehnten ist die Topologie als Grundlagendisziplin anerkannt. Dementsprechend kann sie neben der Algebra als zweiter Stützpfeiler für eine große Anzahl anderer Felder der Mathematik angesehen werden. Sie ist besonders wichtig für die Geometrie, die Analysis, die Funktionalanalysis und die Theorie der Liegruppen. Ihrerseits hat sie auch die Mengenlehre und Kategorientheorie befruchtet.

Der grundlegende Begriff der Topologie ist der des topologischen Raums, welcher eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von „Nähe“ darstellt und damit weitreichende Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie Stetigkeit und Grenzwert erlaubt. Viele mathematische Strukturen lassen sich als topologische Räume auffassen. Topologische Eigenschaften einer Struktur werden solche genannt, die nur von der Struktur des zugrundeliegenden topologischen Raumes abhängen. Dies sind gerade solche Eigenschaften, die durch „Verformungen“ oder durch Homöomorphismen nicht verändert werden. Dazu gehört in anschaulichen Fällen das Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren und Verdrillen einer geometrischen Figur. Zum Beispiel sind eine Kugel und ein Würfel aus Sicht der Topologie nicht zu unterscheiden; sie sind homöomorph. Ebenso sind ein Donut, dessen Form in der Mathematik als Volltorus bezeichnet wird, und eine einhenkelige Tasse homöomorph.

Die Topologie gliedert sich selbst in mehrere Teilgebiete. Hierzu zählen die algebraische Topologie, die geometrische Topologie sowie die topologische Graphen- und die Knotentheorie. Ein zentrales Problem dieser Disziplinen ist der Versuch, Verfahren zu entwickeln, zu beweisen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind, oder allgemeiner, dass stetige Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften nicht existieren. Die mengentheoretische Topologie kann hierbei als Grundlage für all diese Teildisziplinen angesehen werden. In dieser werden insbesondere auch topologische Räume betrachtet, deren Eigenschaften sich im Allgemeinen besonders weit von denen geometrischer Figuren unterscheiden.

Historie: Der Begriff „Topologie“ findet sich erstmals um 1840 bei JOHANN BENEDICT LISTING; die ältere Bezeichnung *analysis situs* (etwa „Lageuntersuchung“) blieb aber lange üblich, mit einem Bedeutungsschwerpunkt jenseits der neueren, „mengentheoretischen“ Topologie.

Die Lösung des Sieben-Brücken-Problems von Königsberg durch LEONHARD EULER im Jahr 1736 gilt als die erste topologische und zugleich als die erste graphentheoretische Arbeit in der Geschichte der Mathematik. Ein anderer Beitrag Eulers zur sogenannten Analysis situs ist der nach ihm benannte Polyedersatz von 1750. Bezeichnet man mit e die Anzahl der Ecken, mit k die der Kanten und mit f die der Flächen eines Polyeders (der noch zu präzisierenden Bedingungen genügt), so gilt $e - k + f = 2$. Erst im Jahr 1860 wurde durch eine von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ angefertigte Abschrift eines verlorenen Manuskriptes von RENÉ DESCARTES bekannt, dass dieser die Formel bereits gekannt hatte.

MAURICE FRÉCHET führte 1906 den metrischen Raum ein. GEORG CANTOR befasste sich mit den Eigenschaften offener und abgeschlossener Intervalle, untersuchte Grenzprozesse, und begründete dabei zugleich die moderne Topologie und die Mengentheorie. Die Topologie ist der erste Zweig der Mathematik, der konsequent mengentheoretisch formuliert wurde und gab dabei umgekehrt Anstöße zur Ausformung der Mengentheorie.

Eine Definition des topologischen Raumes wurde als erstes von FELIX HAUSDORFF im Jahre 1914 aufgestellt. Nach heutigem Sprachgebrauch definierte er dort eine offene Umgebungsbasis, nicht jedoch eine Topologie, welche erst durch KAZIMIERZ KURATOWSKI beziehungsweise HEINRICH TIETZE um 1922 eingeführt wurde. In dieser Form wurden die Axiome dann durch die Lehrbücher von KURATOWSKI (1933), ALEXANDROFF/HOPF (1935), BOURBAKI (1940) und KELLEY (1955) popularisiert. Es stellte sich heraus, dass sich viele mathematische Erkenntnisse auf diese Begriffsbasis übertragen ließen. Es wurde beispielsweise erkannt, dass zu einer festen Grundmenge unterschiedliche Metriken existieren, die zur gleichen topologischen Struktur auf dieser Menge führten, aber auch, dass verschiedene Topologien auf der gleichen Grundmenge möglich sind. Die mengentheoretische Topologie entwickelte sich auf dieser Grundlage zu einem eigenständigen Forschungsgebiet, das sich in gewisser Weise aus der Geometrie ausgegliedert hat beziehungsweise der Analysis näher steht als der eigentlichen Geometrie.

Ein Ziel der Topologie ist die Entwicklung von Invarianten von topologischen Räumen. Mit diesen Invarianten können topologische Räume unterschieden werden. Beispielsweise ist das Geschlecht einer kompakten, zusammenhängenden orientierbaren Fläche eine solche Invariante. Die Sphäre mit Geschlecht null und der Torus mit Geschlecht eins sind unterschiedliche topologische Räume. Die algebraische Topologie entstand aus Überlegungen von HENRI POINCARÉ zur Fundamentalgruppe, die ebenfalls eine Invariante in der Topologie ist. Im Laufe der Zeit wurden topologische Invarianten wie die von HENRI POINCARÉ untersuchten Bettizahlen durch algebraische Objekte wie Homologie- und Kohomologiegruppen ersetzt.

JOHANN BENEDICT LISTING (* 25. Juli 1808 in Frankfurt am Main; † 24. Dezember 1882 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker und Physiker. Er studierte Mathematik und Architektur an der Universität Göttingen, besaß jedoch ein viel breiteres Spektrum an Interessen, darunter Erdmagnetismus und physiologische Optik. Er promovierte 1834

in Göttingen. Anschließend machte er eine dreijährige Reise mit WOLFGANG SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, um die vulkanischen Aktivitäten des Ätnas auf Sizilien zu untersuchen. 1837 wurde er Lehrer des Maschinenzeichnens, der Maschinenlehre und der angewandten Mathematik an der Höheren Gewerbeschule zu Hannover, 1839 außerordentlicher Professor der Physik als Nachfolger von WILHELM EDUARD WEBER und 1849 Professor der Mathematik in Göttingen. Durch seinen Mentor CARL FRIEDRICH GAUSS begann Listing sich auf die Topologie zu spezialisieren, die zu dieser Zeit noch *analysis situs* genannt wurde. Er verfasste 1847 mit den Vorstudien zur Topologie ein Lehrbuch zur Topologie, wobei er diesen Begriff bereits zehn Jahre zuvor in seinen Briefen verwandt hatte. Durch dieses Buch ging der Begriff in allgemeinen Gebrauch über. Unabhängig von AUGUST FERDINAND MÖBIUS entdeckte Listing 1858 die besonderen Eigenschaften des Möbiusbandes. 1872 prägte er für die idealisierte geometrische Oberfläche der Erde die Bezeichnung Geoid. 1861 wurde er Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

LEONHARD EULER (lateinisch LEONHARDUS EULERUS; * 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

MAURICE RENÉ FRÉCHET (* 2. September 1878 in Maligny, Département Yonne; † 4. Juni 1973 in Paris) war ein französischer Mathematiker, der grundlegende Arbeiten in der Funktionalanalysis verfasste. In der Funktionalanalysis führte er 1906 in seiner Doktorarbeit die metrischen Räume ein und legte Grundsteine der Topologie, auf seiner Suche nach Abstraktion der Arbeiten von VITO VOLTERRA, CESARE ARZELÀ, JACQUES HADAMARD und GEORG CANTOR. Der Name metrischer Raum stammt allerdings nicht von ihm, sondern von FELIX HAUSDORFF. FRÉCHET führte in seiner Dissertation auch die Begriffe Kompaktheit und Separabilität ein. Er führte ferner die Begriffe der gleichmäßigen Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit ein. Es war auch FRÉCHET, der 1928 als erster den Begriff Banachraum benutzte, wobei er damals die l^p -Folgenräume als Banachräume bezeichnete.

GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR (* 3. März 1845 in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle an der Saale) war ein deutscher Mathematiker. Er lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre und veränderte den Begriff der Unendlichkeit.

FELIX HAUSDORFF (* 8. November 1868 in Breslau; † 26. Januar 1942 in Bonn) war ein deutscher Mathematiker. Er gilt als Mitbegründer der allgemeinen Topologie und lieferte wesentliche Beiträge zur allgemeinen und deskriptiven Mengenlehre, zur Maßtheorie, Funktionalanalysis und Algebra. Neben seinem Beruf wirkte er unter dem Pseudonym PAUL MONGRÉ auch als philosophischer Schriftsteller und Literat. Er wurde von den Nationalsozialisten in den Tod getrieben.

KAZIMIERZ KURATOWSKI (* 2. Februar 1896 in Warschau; † 18. Juni 1980 in War-

schau) war ein polnischer Mathematiker und Logiker. Er schloss 1913 das philologische Chrzanowski-Gymnasium in Warschau ab und studierte anschließend bis 1914 in Glasgow im Fach Mathematik. Um Schwierigkeiten mit seinem Namen auszuschließen, änderte er ihn in CASIMIR CURATOV ab. Nach der Neugründung der polnischen Universität Warschau 1915 kehrte er dorthin zurück und schloss drei Jahre später sein Studium ab. Seine Promotionsarbeit aus dem Jahr 1921 umfasste zwei Teile, nämlich erstens eine axiomatische Fundierung der Topologie, indem er die so genannte Axiomatik der Abschlüsse einführte und zweitens die endgültige Entscheidung des Problems der irreduziblen Kontinua, die das Thema der Pariser Doktorarbeit von ZYGMUNT JANISZEWSKI gewesen war. Der Betreuer der Doktorarbeit war SIERPINSKI, da der ursprüngliche Betreuer, JANISZEWSKI, nicht mehr am Leben war.

HEINRICH FRANZ FRIEDRICH TIETZE (* 31. August 1880 in Schleinz bei Neunkirchen; † 17. Februar 1964 in München) war ein österreichisch-deutscher Mathematiker, der insbesondere auf dem Gebiet der Topologie tätig war. TIETZE arbeitete vor allem über Topologie, aber auch z.B. über Elementargeometrie (Konstruktionen mit Zirkel und Lineal), Zahlentheorie, gewöhnliche und verallgemeinerte Kettenbrüche. Er leistete wichtige Beiträge in den Anfangsjahren der Topologie.

JULES HENRI POINCARÉ (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris) war ein bedeutender französischer Mathematiker, theoretischer Physiker, theoretischer Astronom und Philosoph. Er galt in seiner Wirkungszeit in den letzten beiden Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts bis zum ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts und danach als einer der bedeutendsten Mathematiker, worin ihm zu seiner Zeit nur in Deutschland DAVID HILBERT Konkurrenz machte, und zusätzlich noch als führender theoretischer Physiker und Astronom. POINCARÉ gilt als Begründer der algebraischen Topologie. Er hat den Begriff der Fundamentalgruppe eingeführt und den in Enrico Bettis Werk ansatzweise enthaltenen Begriff der Homologie weiterentwickelt (wobei seine Methodik vor allem kombinatorischer Natur war und die algebraische Perspektive wenig ausgeprägt). Er gab eine Definition der Mannigfaltigkeit (allerdings nur eingebettet in einen euklidischen Raum) und formulierte für sie die Poincaré-Dualität. Für eine n -dimensionale kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit besagt diese, dass die i -te Homologiegruppe isomorph ist zur $(n-i)$ -ten Kohomologie. So wie er die meisten seiner topologischen Begriffe und Ergebnisse nicht rigoros formulierte, hat er auch diese nicht rigoros bewiesen. Zu seinem algebraisch-topologischen Werk gehört auch die erst 2002 durch GRIGORI PERELMAN für drei Dimensionen bewiesene Poincaré-Vermutung (in den höherdimensionalen Fällen war sie schon vorher bewiesen worden). Wichtig ist ferner sein Werk über Differentialformen. POINCARÉ erkannte als erster, dass man mit ihnen die De-Rham-Kohomologie definieren kann, die unter bestimmten Umständen isomorph ist zur singulären, doch konnte er dies nicht beweisen. Sein Œuvre enthält auch Ansätze zur Morse-Theorie und zur symplektischen Geometrie.