Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 20. April 2017

Topologie

1. Übungsblatt, SoSe 2017

Keine Abgabe, keine Korrektur!

(1) Zeigen Sie, dass in jedem metrischer Raum jede abgeschlossene Menge als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen darstellbar ist.

Hinweis: Wir nennen eine Menge abzählbar, wenn Sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder endlich ist.

(2) Bestimmen Sie alle möglichen Topolgien auf den Mengen $X_1 := \{1, 2\}$ und $X_2 := \{1, 2, 3\}$.

(3) Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Mengensystem mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset$, $X \in \mathscr{F}$.

(b) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$, so ist $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathscr{F}$.

(c) Sind A eine Indexmenge und $F_\alpha \in \mathscr{F}$ für $\alpha \in \mathsf{A}$, so ist $\bigcap_{\alpha \in \mathsf{A}} F_\alpha \in \mathscr{F}$.

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Topologie $\mathscr{T}$ auf X, in der $\mathscr{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen ist.

(4) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ stets eine größere Mächtigkeit als X hat.

Hinweis: Die Lösung ist fast ein Einzeiler und besteht aus einem gemeinen Trick. Es ist keine Fallunterscheidung bzgl. der Mächtigkeit von X notwendig.