Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 18. Mai 2017

Topologie

5. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 31.05.2017

(1) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x_0 \in X$ und $r > 0$ seien

$$U_r(x_0) := \{\, x \in X : d(x, x_0) < r \,\} \quad \text{und} \quad \overline{U}_r(x_0) := \{\, x \in X : d(x, x_0) \leq r \,\}\,.$$

Weiter sei $\overline{U_r(x_0)}$ der Abschluss von $U_r(x_0)$. Zeigen Sie, dass $\overline{U_r(x_0)} \subset \overline{U}_r(x_0)$. Geben Sie ein Beispiel an, dass im Allgemeinen $\overline{U_r(x_0)} = \overline{U}_r(x_0)$ nicht gilt.

Nun sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und d die von der Norm $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik. Zeigen Sie, dass $\overline{U_r(x_0)} = \overline{U}_r(x_0)$.

(2) Es sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass E genau dann nirgends dicht in X ist, wenn $X \setminus E$ dicht in X ist. Gilt die Aussage auch noch, wenn man die Voraussetzung der Abgeschlossenheit von E weglässt?

(3) Es sei $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit der Topologie $\mathscr{T}_X := \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ und $Y := \{6, 7\}$ mit der Topologie $\mathscr{T}_Y := \{\emptyset, Y, \{6\}\}$ versehen. Bestimmen Sie alle stetigen Abbildungen $f\colon (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$.

(4) Es sei X ein toplogischer Raum, $E \subset X$ und $\chi_E\colon X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) von E.

(a) Bestimmen Sie alle $x \in X$, in denen χ_E stetig ist.

(b) Geben Sie zwei Topologien auf $\mathbb{R}$ an, sodass χ_E genau dann stetig ist, wenn E offen bzw. abgeschlossen ist.