Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 1. Juni 2017

Topologie

6. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 07.06.2017

(1) Es seien X, Y topologische Räume und $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Weiter seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Zeigen Sie:

(a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

(d) Die Projektionsabbildung $\pi_X \colon X \times Y \to X$ ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

Hinweis: Wählen Sie $X = Y = \mathbb{R}$.

(2) Es seien X, Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung und G_f der Graph von f (vgl. Beispiel 2.1.8 (g)). Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $g \colon X \to X \times Y$ mit $g(x) := (x, f(x))$ eine Einbettung ist.

(3) Die Menge $\{0, 2\}$ werde mit der diskreten Topologie und die Menge $X := \prod_{k=1}^{\infty} \{0, 2\} = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen. Dann wird durch

$$(x_n) \to \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \cdots + \frac{x_k}{3^k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

eine Abbildung $f \colon X \to C$ definiert, wobei C das Cantorsche Diskontinuum aus Beispiel 1.2.10 ist. Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist (vgl. Beispiel 2.1.8 (h)).

Hinweis: Es ist $\frac{1}{3} = (0, 2, 2, 2, \dots)$.

(4) Es seien A eine Indexmenge, $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ eine Familie topologischer Räume, Π das kartesische Produkt dieser Räume mit der Produkttopologie versehen und $\pi_\alpha \colon \Pi \to X_\alpha$ die kanonischen Projektionen. Weiter sei $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ ein Punkt in Π und $D := \{\, x \in \Pi : \pi_\alpha(x) = a_\alpha$ für fast alle $\alpha \in \mathsf{A} \,\}$. Zeigen Sie, dass D dicht in Π ist.