

## Topologie

6. Übungsblatt, SoSe 2017

### Freiwillige Abgabe in den Übungen am 07.06.2017

- (1) Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen. Weiter seien  $A \subset X$  und  $B \subset Y$ . Zeigen Sie:

(a)  $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ .

(b)  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ .

(c)  $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$ .

- (d) Die Projektionsabbildung  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

*Hinweis:* Wählen Sie  $X = Y = \mathbb{R}$ .

- (2) Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $G_f$  der Graph von  $f$  (vgl. Beispiel 2.1.8(g)). Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildung  $g: X \rightarrow X \times Y$  mit  $g(x) := (x, f(x))$  eine Einbettung ist.

- (3) Die Menge  $\{0, 2\}$  werde mit der diskreten Topologie und die Menge  $X := \prod_{k=1}^{\infty} \{0, 2\} = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  mit der Produkttopologie versehen. Dann wird durch

$$(x_n) \mapsto \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \cdots + \frac{x_k}{3^k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

eine Abbildung  $f: X \rightarrow C$  definiert, wobei  $C$  das Cantorsche Diskontinuum aus Beispiel 1.2.10 ist. Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist (vgl. Beispiel 2.1.8(h)).

*Hinweis:* Es ist  $\frac{1}{3} = (0, 2, 2, 2, \dots)$ .

- (4) Es seien  $A$  eine Indexmenge,  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine Familie topologischer Räume,  $\Pi$  das kartesische Produkt dieser Räume mit der Produkttopologie versehen und  $\pi_\alpha: \Pi \rightarrow X_\alpha$  die kanonischen Projektionen. Weiter sei  $a = (a_\alpha)_{\alpha \in A}$  ein Punkt in  $\Pi$  und  $D := \{x \in \Pi : \pi_\alpha(x) = a_\alpha \text{ für fast alle } \alpha \in A\}$ . Zeigen Sie, dass  $D$  dicht in  $\Pi$  ist.