Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 22. Juni 2017

# Topologie

8. Übungsblatt, SoSe 2017

**Freiwillige Abgabe in den Übungen am 28.06.2017**

(1) Es sei $G$ eine topologische Gruppe und $\mathscr{U}$ das Umgebungssystem des Einselements $e$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $U \in \mathscr{U}$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V^2 \subset U$.

(b) Zu jedem $U \in \mathscr{U}$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $V^{-1} \subset U$.

(c) Zu jedem $U \in \mathscr{U}$ und $x \in U^\circ$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $xV \subset U$.

(d) Zu jedem $U \in \mathscr{U}$ und $x \in G$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit $xVx^{-1} \subset U$.

Dabei bedeuten $V^2 = \{\, v^2 : v \in V \,\}$, $V^{-1} = \{\, v^{-1} : v \in V \,\}$, $xV = \{\, xv : v \in V \,\}$, $xVx^{-1} = \{\, xvx^{-1} : v \in V \,\}$.

(2) Es sei $\mathsf{A}$ eine nichtleere Indexmenge mit einer Ordnungsrelation $\prec$. Für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ gebe es einen topologischen Raum $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ und zu je zwei Indizes $\alpha, \beta \in \mathsf{A}$ mit $\alpha \prec \beta$ eine stetige Abbildung $f_{\beta\alpha} \colon X_\beta \to X_\alpha$, sodass gilt:

(i) $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{|X_\alpha}$ für alle $\alpha \in \mathsf{A}$,

(ii) $f_{\gamma\alpha} = f_{\beta\alpha} \circ f_{\gamma\beta}$ für alle $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathsf{A}$ mit $\alpha \prec \beta \prec \gamma$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[d, "f_{\beta\alpha}"'] & X_\gamma \arrow[l, "f_{\gamma\beta}"'] \arrow[dl, "f_{\gamma\alpha}"] \\ X_\alpha & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Dann heißt $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\mathsf{A}}$ ein *projektives System* topologischer Räume. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen topologischen Raum $(X, \mathscr{T}) = \varprojlim X_\alpha$ mit folgender „universeller Eigenschaft“:

($*$) Ist $Y$ ein beliebiger topologischer Raum und gibt es stetige Abbildungen $(g_\alpha \colon Y \to X_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$, sodass für jedes Paar $\alpha$, $\beta \in \mathsf{A}$ mit $\alpha \prec \beta$ gilt $g_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ g_\beta$, so gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $g \colon Y \to X$, sodass $g_\alpha = f_\alpha \circ g$ für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$.

(b) Durch diese Eigenschaft ist $X$ bis auf Homöomorphie bestimmt, d.h. hat ein weiterer topologischer Raum $X'$ mit stetigen Abbildungen $(f'_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ die Eigenschaft $(*)$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus $h\colon X' \to X$, sodass $f'_\alpha = f_\alpha \circ h$ für alle $\alpha \in \mathsf{A}$.

Der Raum $X = \varprojlim X_\alpha$ heißt *projektiver* oder *inverser* Limes der $X_\alpha$.

(3) Es seien $(Y_\beta)_{\beta\in\mathsf{B}}$ topologische Räume. Das System $\mathsf{A}$ aller nichtleeren endlichen Teilmengen von $\mathsf{B}$ werde durch die Mengeninklusion geordnet. Zu $\alpha \in \mathsf{A}$ werde $X_\alpha = \prod_{\beta\in\alpha} Y_\beta$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie, dass sich der Produktraum $\Pi = \prod_{\beta\in\mathsf{B}} Y_\beta$, versehen mit der Produkttopologie mit dem projektiven Limes $\varprojlim X_\alpha$ identifizieren lässt.

(4) Ham-Sandwich-Problem: Eine Scheibe Brot sei mit einer Scheibe Schinken belegt. Aufgabe ist es, durch einen geraden Schnitt Brot und Schinken gleichzeitig zu halbieren. Ist das Problem lösbar?