Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 29. Juni 2017

Topologie

9. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 05.07.2017

(1) Zeigen Sie:

(a) Jede nichtleere, offene, zusammenhängende Menge des $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend. Können Sie das Ergebnis verallgemeinern?

(b) Jede Zusammenhangskomponente einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist offen, und es gibt höchstens abzählbar viele Komponenten. Können Sie das Ergebnis verallgemeinern?

(2) Zeigen Sie:

(a) Ist X ein zusammenhängender topologischer Raum und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf X, so ist der Quotientenraum $X/\sim$ zusammenhängend.

(b) Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von X in einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten konstant ist.

(3) Es sei Ω der Ordinalzahlraum aus Beispiel 4.1.7. Geben Sie ein Netz in Ω_0 an, das gegen $\omega_1 \in \Omega$ konvergiert.

(4) Die Menge $X := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ werde mit folgender Topologie versehen:

(i) $X \setminus \{(0,0)\}$ trage die diskrete Topologie.

(ii) Eine Menge $U \subset X$ ist eine Umgebung von $(0,0)$, wenn $(0,0) \in U$ und die Mengen $\{\, n \in \mathbb{N}_0 : (n,m) \notin U\}$ für fast alle $m \in \mathbb{N}_0$ endlich sind.

Zeigen Sie:

(a) Es ist X ein Hausdorffraum.

(b) Es gibt keine Folge in $X \setminus \{(0,0)\}$, die gegen $(0,0)$ konvergiert.

(c) Es gibt eine Folge (x_n) in $X \setminus \{(0,0)\}$, die $(0,0)$ als Häufungswert hat, aber keine Teilfolge von (x_n) konvergiert gegen $(0,0)$.