Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dr. Michela Egidi

Dortmund, 6. Juli 2017

Topologie

10. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 12.07.2017

(1) Es sei X eine unendliche Menge mit der kofiniten Topologie versehen. Zeigen Sie, dass die Komplemente der endlichen Teilmengen von X einen Filter $\mathscr{F}$ erzeugen, und bestimmen Sie die Menge der Berührpunkte von $\mathscr{F}$.

(2) Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{A}(X)$ die Menge seiner abgeschlossenen Teilmengen. Ein System $\mathscr{F}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X heißt *abgeschlossener Filter*, wenn es die Filtereigenschaften (1), (2), (3) aus Definition 4.3.1 nur für abgeschlossene Mengen hat, d.h. ist $F' \in \mathscr{A}(X)$ mit $F' \supset F$, $F \in \mathscr{F}$, so ist $F' \in \mathscr{F}$. Zeigen Sie:

(a) Jeder abgeschlossene Filter ist in einem abgeschlossenen Ultrafilter enthalten.

(b) Ein abgeschlossener Filter $\mathscr{F}$ ist genau dann ein abgeschlossener Ultrafilter, wenn jede abgeschlossene Menge $B \subset X$, die jedes $F \in \mathscr{F}$ schneidet, zu $\mathscr{F}$ gehört.

(c) Ist Y ein weiterer topologischer Raum, $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathscr{F}$ ein abgeschlossener Filter auf X, so ist $f^*(\mathscr{F}) = \{\, B \in \mathscr{A}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathscr{F} \,\}$ ein abgeschlossener Filter auf Y.

(3) Es sei X eine Menge und $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X. Zeigen Sie: Sind E, $F \subset X$ und $E \cup F \in \mathscr{F}$, so ist $E \in \mathscr{F}$ oder $F \in \mathscr{F}$.

An welches Ergebnis aus der Algebra erinnert Sie das?

(4) Es seien X, Y Mengen, $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann der Bildfilter $f(\mathscr{F})$ auch ein Ultrafilter auf Y ist.