

## Topologie

10. Übungsblatt, SoSe 2017

### Freiwillige Abgabe in den Übungen am 12.07.2017

- (1) Es sei  $X$  eine unendliche Menge mit der kofiniten Topologie versehen. Zeigen Sie, dass die Komplemente der endlichen Teilmengen von  $X$  einen Filter  $\mathcal{F}$  erzeugen, und bestimmen Sie die Menge der Berührungspunkte von  $\mathcal{F}$ .
- (2) Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{A}(X)$  die Menge seiner abgeschlossenen Teilmengen. Ein System  $\mathcal{F}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  heißt *abgeschlossener Filter*, wenn es die Filtereigenschaften (1), (2), (3) aus Definition 4.3.1 nur für abgeschlossene Mengen hat, d.h. ist  $F' \in \mathcal{A}(X)$  mit  $F' \supset F$ ,  $F \in \mathcal{F}$ , so ist  $F' \in \mathcal{F}$ . Zeigen Sie:
  - (a) Jeder abgeschlossene Filter ist in einem abgeschlossenen Ultrafilter enthalten.
  - (b) Ein abgeschlossener Filter  $\mathcal{F}$  ist genau dann ein abgeschlossener Ultrafilter, wenn jede abgeschlossene Menge  $B \subset X$ , die jedes  $F \in \mathcal{F}$  schneidet, zu  $\mathcal{F}$  gehört.
  - (c) Ist  $Y$  ein weiterer topologischer Raum,  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $\mathcal{F}$  ein abgeschlossener Filter auf  $X$ , so ist  $f^*(\mathcal{F}) = \{B \in \mathcal{A}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$  ein abgeschlossener Filter auf  $Y$ .
- (3) Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Zeigen Sie: Sind  $E, F \subset X$  und  $E \cup F \in \mathcal{F}$ , so ist  $E \in \mathcal{F}$  oder  $F \in \mathcal{F}$ .

An welches Ergebnis aus der Algebra erinnert Sie das?
- (4) Es seien  $X, Y$  Mengen,  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$  und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann der Bildfilter  $f(\mathcal{F})$  auch ein Ultrafilter auf  $Y$  ist.