TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DR. MICHELA EGIDI

Dortmund, 13. Juli 2017

Topologie

11. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 19.07.2017

(1) Wir erklären auf $\mathbb{R}$ eine Topologie wie folgt: Für $x \neq 0$ sei $\mathscr{U}(x)$ das Umgebungssystem von x in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$. Weiter sei $\mathscr{U}(0)$ das System der Teilmengen von $\mathbb{R}$, die eine Menge der Form $(a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ mit $a < 0 < b$ enthalten. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{U}(x))_{x \in \mathbb{R}}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert, in der $\mathbb{R}$ hausdorffsch aber nicht regulär ist.

(2) Es sei X eine linear geordnete Menge mit der Ordnungstopologie aus Beispiel 1.1.6 (h). Zeigen Sie, dass X normal ist.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass für disjunkte, abgeschlossene Mengen A, $B \subset X$ die Mengen

$$A^* := \bigcup \{ [a, b] : a\,,\ b \in A\,,\ [a, b] \cap B = \emptyset \} \text{ und}$$
$$B^* := \bigcup \{ [c, d] : c\,,\ d \in B\,,\ [c, d] \cap A = \emptyset \}$$

disjunkt sind. Dann zerlegen Sie A^* und B^* in ihre konvexen Komponenten und trennen A^* und B^* komponentenweise durch offene Mengen. Dabei heißt eine Menge C einer linear geordneten Menge X *konvex*, wenn mit α, $\beta \in C$ auch $[\alpha, \beta] \subset C$ gilt.

(3) Es sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $E \subset X$ mit $E \neq \emptyset$, so gilt $\overline{E} = \{ x \in X : \operatorname{dist}(x, E) = 0 \}$.

(b) Sind A, $B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Mengen, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0, 1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$. Folgern Sie hieraus, dass X ein normaler Raum ist.

(4) Wir führen auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow\ x = y \text{ oder } x\,,\ y \in \mathbb{Q}$$

und betrachten den Quotientenraum $X = [0, 1]/\sim$ mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass X ein T_0-Raum aber kein T_j-Raum für $j = 1, 2, 3, 4$ ist.