

Topologie

11. Übungsblatt, SoSe 2017

Freiwillige Abgabe in den Übungen am 19.07.2017

- (1) Wir erklären auf \mathbb{R} eine Topologie wie folgt: Für $x \neq 0$ sei $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von x in der natürlichen Topologie von \mathbb{R} . Weiter sei $\mathcal{U}(0)$ das System der Teilmengen von \mathbb{R} , die eine Menge der Form $(a, b) \setminus \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ mit $a < 0 < b$ enthalten. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{U}(x))_{x \in \mathbb{R}}$ eine Topologie auf \mathbb{R} definiert, in der \mathbb{R} hausdorffsch aber nicht regulär ist.
- (2) Es sei X eine linear geordnete Menge mit der Ordnungstopologie aus Beispiel 1.1.6 (h). Zeigen Sie, dass X normal ist.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass für disjunkte, abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ die Mengen

$$A^* := \bigcup \{ [a, b] : a, b \in A, [a, b] \cap B = \emptyset \} \text{ und} \\ B^* := \bigcup \{ [c, d] : c, d \in B, [c, d] \cap A = \emptyset \}$$

disjunkt sind. Dann zerlegen Sie A^* und B^* in ihre konvexen Komponenten und trennen A^* und B^* komponentenweise durch offene Mengen. Dabei heißt eine Menge C einer linear geordneten Menge X *konvex*, wenn mit $\alpha, \beta \in C$ auch $[\alpha, \beta] \subset C$ gilt.

- (3) Es sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:
- (a) Ist $E \subset X$ mit $E \neq \emptyset$, so gilt $\overline{E} = \{ x \in X : \text{dist}(x, E) = 0 \}$.
- (b) Sind $A, B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Mengen, so gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$. Folgern Sie hieraus, dass X ein normaler Raum ist.
- (4) Wir führen auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation \sim ein durch

$$x \sim y : \iff x = y \text{ oder } x, y \in \mathbb{Q}$$

und betrachten den Quotientenraum $X = [0, 1] / \sim$ mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass X ein T_0 -Raum aber kein T_j -Raum für $j = 1, 2, 3, 4$ ist.