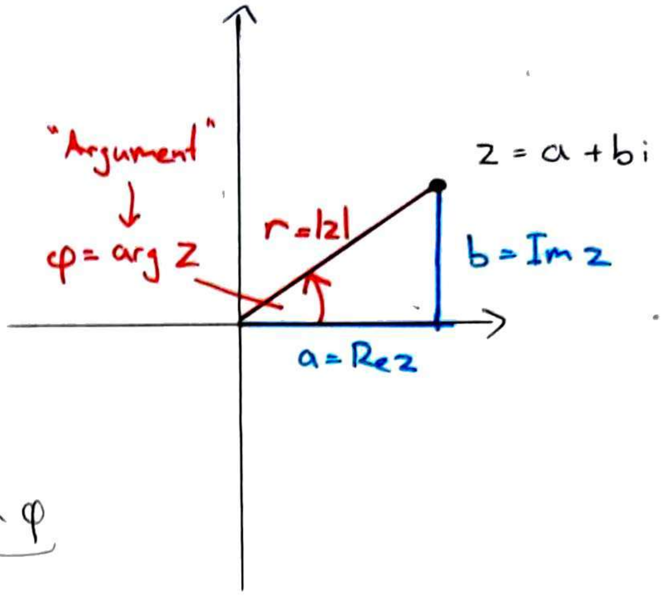
Polarkoordinaten:

In Polarkoordinaten schreiben wir eine komplexe Zahl



$$z = \underbrace{r\cos\varphi}_{a} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{b}$$

Def.: Die komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren wir durch

$$\exp(z) = e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Damit schreiben wir $z \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten einfach als

$$z = re^{\varphi i} \qquad \text{mit } r \geq 0 \text{ und } \varphi \in \,]-\pi, \pi]$$

Bemerkung: Für alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ ist diese Darstellung eindeutig. Für $z = 0$ ist $r = 0$, aber $\varphi \in \,]-\pi,\pi]$ ist egal.

- $z_1 \pm z_2 = r_1 e^{\varphi_1 i} \pm r_2 e^{\varphi_2 i}$ (lässt sich i.A. nicht weiter vereinfachen)
- $z_1 z_2 = (r_1 e^{\varphi_1 i})(r_2 e^{\varphi_2 i}) = (r_1 r_2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{\varphi_1 i}}{r_2 e^{\varphi_2 i}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2) i}$

Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten:

- Gegeben: $z = r e^{\varphi i}$

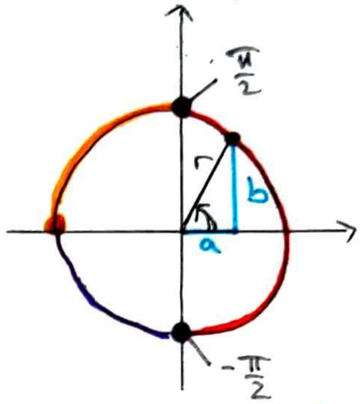
  Gesucht: $z = a + bi$

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

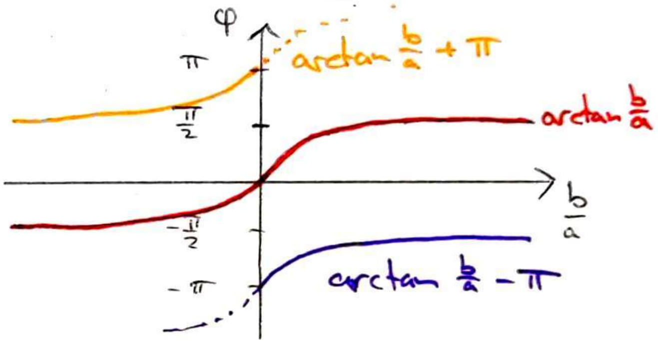
- Gegeben: $z = a + bi$

  Gesucht: $z = r e^{\varphi i}$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} + \pi & : \; a < 0, \; b \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & : \; a = 0, \; b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} & : \; a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : \; a = 0, \; b < 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & : \; a < 0, \; b < 0 \end{cases}$$



Rechnen mit der komplexen Exponentialfunktion

- Additionstheorem: $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \qquad \text{einfach}$$

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$+ i (\cos x \sin y + \sin x \cos y) \qquad \text{kompliziert}$$

- Ableitung, $k, \omega \in \mathbb{R}$

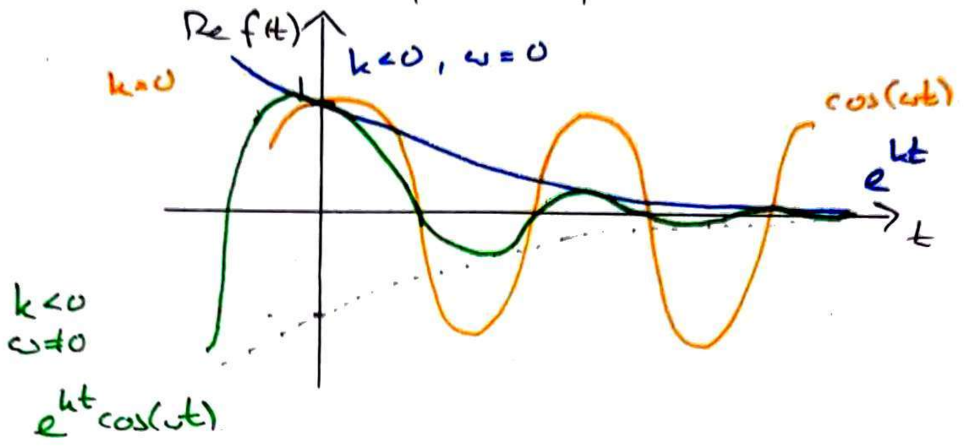
$$f(\underset{\in \mathbb{R}}{t}) = e^{(k+\omega i)t} \qquad f'(t) = (k + \omega i) e^{(k+\omega i)t} \qquad \text{einfach}$$

$$f(t) = e^{kt}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$$

$$f'(t) = k e^{kt}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right) + e^{kt}\left(-\omega\sin(\omega t) + i\omega\cos(\omega t)\right)$$

kompliziert

=> Rechnen mit der komplexen Exponentialfunktion ist häufig sehr einfach!

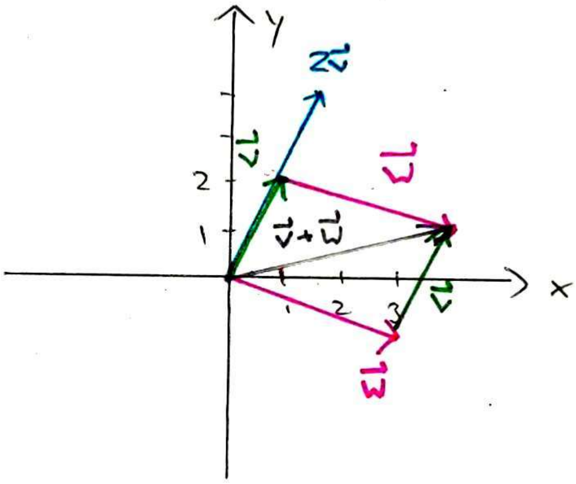


10 Vektorrechnung

Def.: Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel, geschrieben als Spalte

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Bsp.: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$



$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{v} - 2\vec{w} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$c\vec{v} + d\vec{w}$ $\qquad$ $c, d \in \mathbb{R}$

↑ $\qquad$ ↑

"Linearkombination" $\qquad$ "Skalare"