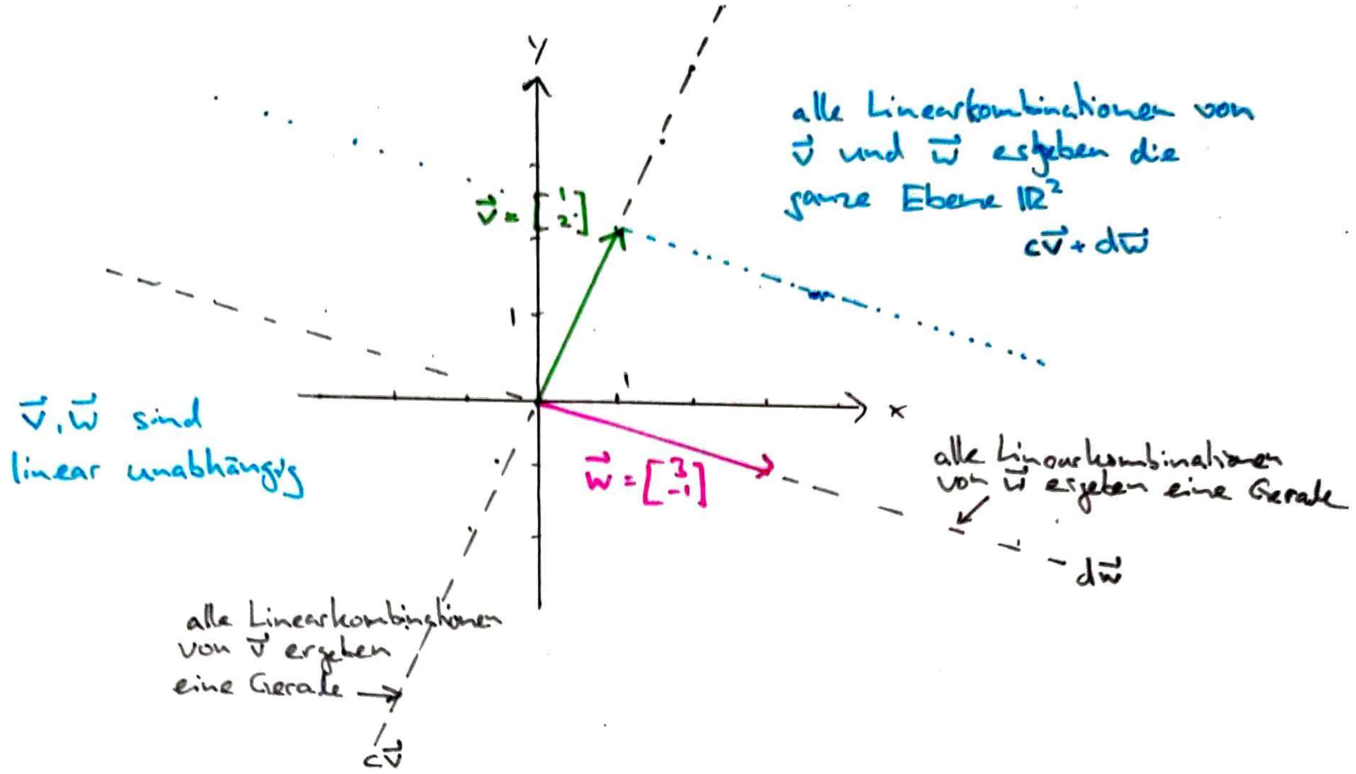
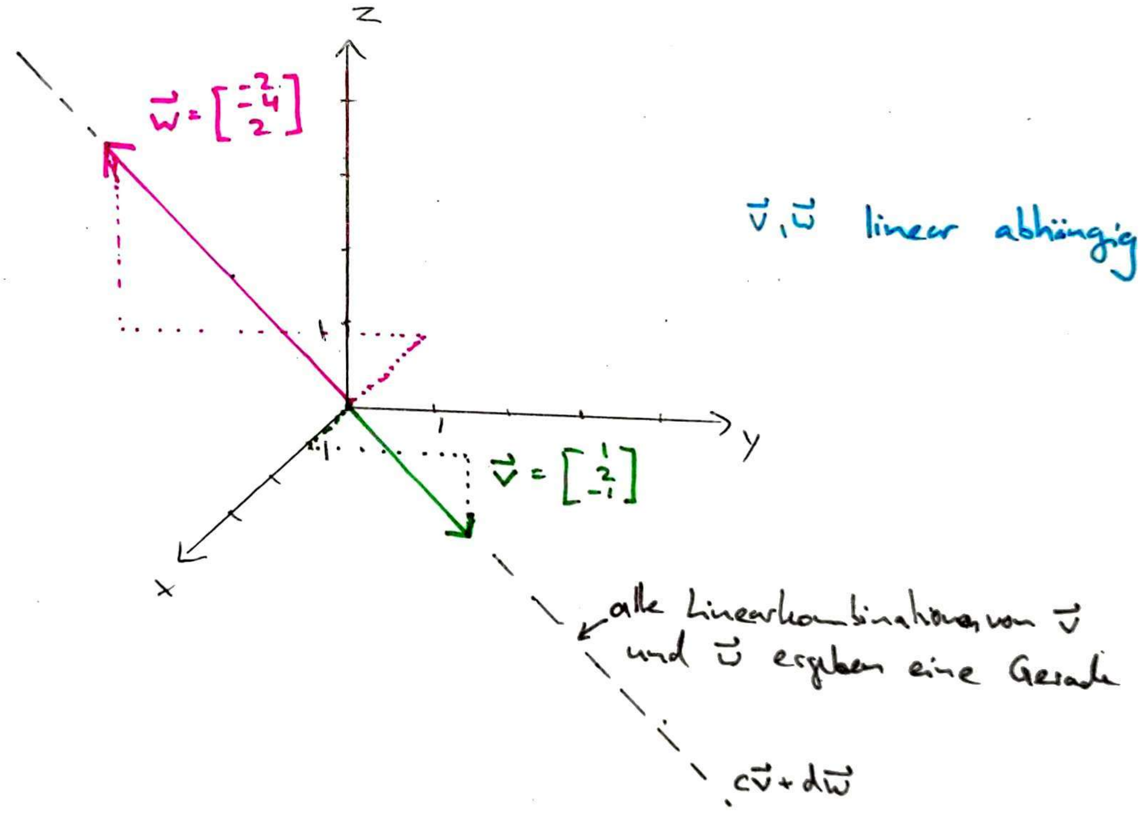




Def.: Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn die einzige Linearkombination, die den Nullvektor ergibt

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

die Linearkombination mit $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ ist.

Längen und Skalarprodukte

Def.: Für $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Bsp.: • $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (4)(-1) + (2)(2) = -4 + 4 = 0$

•

Preise für Produkte $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$

Verkaufte Stückzahlen $\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}$ (negatives q_i = Einkauf)

$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + \dots + p_5 q_5 =$ Gesamtumsatz

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ heißt Einnahmen = Ausgaben (ausgeglichene Bilanz)

Def.: Die Länge oder Norm eines Vektors ist

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

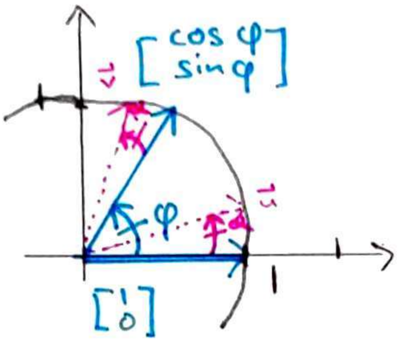
Bsp.:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Def.: Ein Einheitsvektor $\vec{v}$ ist ein Vektor von Norm 1: $\|\vec{v}\| = 1$.

Bsp.: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$ allgemein für $\vec{u} \neq \vec{0}$: $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

Winkel zwischen Vektoren



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \cos\varphi$$

Für andere Einheitsvektoren mit Winkel φ zwischen ihnen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\varphi$$

Allgemein:

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \cos\varphi$$

Folgerungen:

① $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0})$

= Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$

② $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ bedeutet: $\vec{u}, \vec{v}$ sind orthogonal

③ $\left| \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \right| = |\cos\varphi| \leq 1$

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

II Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zeilenbild

$$2x + y = 4 \qquad (y = 4 - 2x)$$
$$3x - y = 1 \qquad (y = 3x - 1)$$

Wo schneiden sich diese zwei Geraden?

Spaltenbild

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Welche Linearkombination aus den zwei Vektoren links ergibt den Vektor rechts?