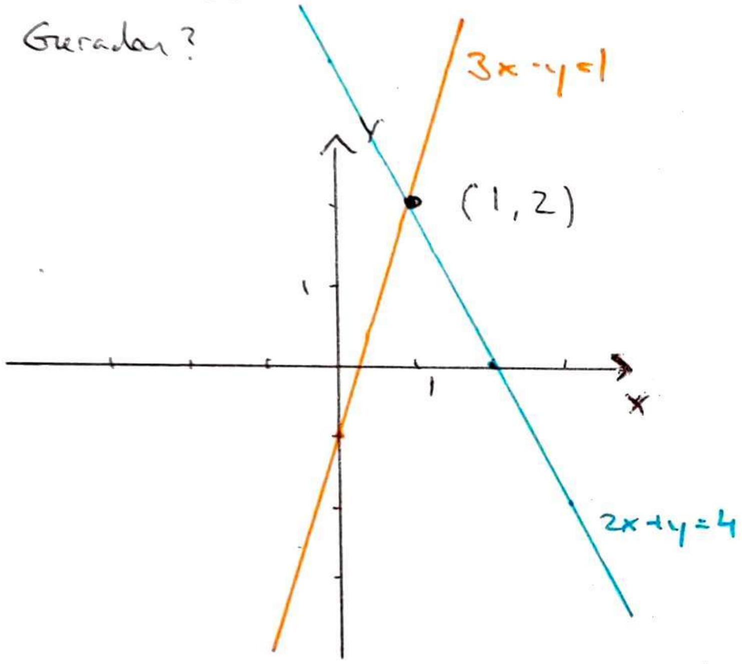
# 11 Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Zeilenbild**

$$2x + y = 4 \qquad (y = 4 - 2x)$$
$$3x - y = 1 \qquad (y = 3x - 1)$$

Wo schneiden sich diese zwei Geraden?

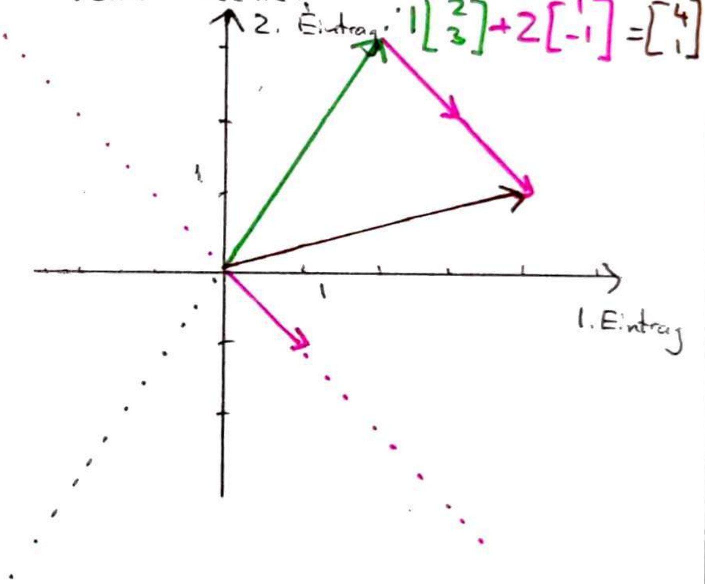



Zwei Geraden schneiden sich im Punkt $(x, y) = (1, 2)$

**Spaltenbild**

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Welche Linearkombination aus den zwei Vektoren links ergibt den Vektor rechts?




$$1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Linearkombination mit Koeffizienten $x = 1$, $y = 2$ führt uns zur rechten Seite.

# Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

(augmentierte Matrix)

1. Pivotelement

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & = \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \cdot(-1) \; + \qquad \cdot(-3) \; +$$

2. Pivotelement

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{array}\right] \quad \cdot(-3) \; +$$

3. Pivotelement

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-1/2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right] \quad \cdot(-2) \; + \qquad \cdot(-3) \; +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right] \quad \cdot(-2) \; +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

eindeutige Lösung $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

① Vorwärtselimination: erzeuge 0 unterhalb der Pivotelemente von links nach rechts

② Skalierung: mache alle Pivotelemente zu 1

③ Rückwärtselimination: erzeuge 0 oberhalb der Pivotelemente von rechts nach links

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 4z + 6t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\ x + 2y \phantom{+ 3z} + t &= -2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 4 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \cdot(-1/2) \;+ \qquad \cdot(-1/2)\;+$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad \cdot(2)\;+$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \cdot 1/2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \cdot(-2)\;+$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \end{array}$$

$x + 2y + t = -2 \qquad x = -2 - 2y - t$

$z + t = 1 \qquad z = 1 - t$

Pivotvariablen

freie Variablen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 2y - t \\ y \\ 1 - t \\ t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y, t \in \mathbb{R}$ beliebig

$\infty$ viele Lösungen
(liegen auf einer Ebene in $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Spalte $= (-1)(1.$ Pivotspalte$)$

2 Pivotelemente, d.h. Spaltenvektoren spannen eine Ebene (2D) in $\mathbb{R}^3$ auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Spalte $= (1)\cdot(1.$ Pivotspalte$) + (1)\cdot(2.$ Pivotspalte$)$

2 Pivotelemente, d.h. Spaltenvektoren spannen eine Ebene (2D) in $\mathbb{R}^3$ auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

3 Pivotelemente, d.h. Spaltenvektoren spannen den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ (3D) auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Pivotelemente, d.h. Spaltenvektoren spannen eine Ebene (2D) in $\mathbb{R}^3$ auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Spalte $= (2)\cdot(1.$ Pivotspalte$)$

3. Spalte $= (-1)\cdot(1.$ Pivotspalte$)$

1 Pivotelement, d.h. Spaltenvektoren spannen eine Gerade (1D) in $\mathbb{R}^3$ auf