Potenzen

Def.: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Potenz

Exponent

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \prod_{i=1}^{n} a$

Basis

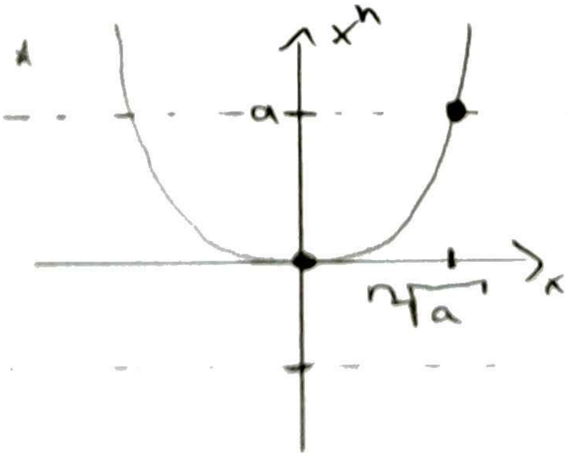
$a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$

$0^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

wobei

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \text{die eindeutige reelle Lösung von } x^n = a & n \text{ ist ungerade} \\ \text{die nichtnegative reelle Lösung von } x^n = a \text{, falls existent}^* & n \text{ ist gerade} \end{cases}$$



$a > 0$: eine positive Lösung

$a = 0$: Lösung $x = 0$

$a < 0$: keine Lösung

- $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{1/n}$ $\quad (m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N})$
- $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ $\quad (q \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty[\ )$

Potenzgesetze:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

(wenn beide Seiten definiert sind)

3 Ungleichungen

$<, \leq, >, \geq, =$: Ordnungszeichen

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$:

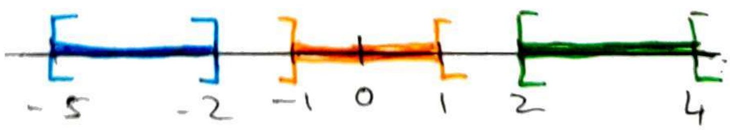
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$]a, b[\; = (a, b)$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$[a, b[\; = [a, b)$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a, b] = (a, b]$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

(halboffene Intervalle)



$[-5, -2]$ $\quad]-1, 1[$ $\quad [2, 4[$

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

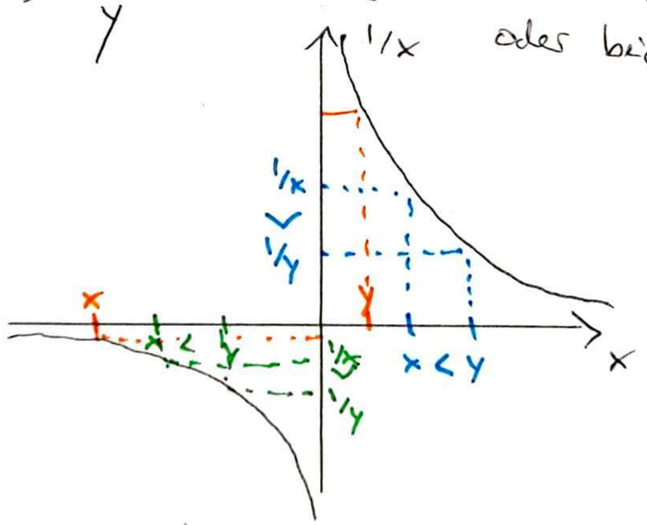
Rechenregeln für Ungleichungen

- $\left.\begin{array}{l} x < y \\ x+z < y+z \end{array}\right\}$ haben dieselbe Lösungsmenge

- $\left.\begin{array}{l} x < y \\ xz < yz \end{array}\right\}$ haben dieselbe Lösungsmenge wenn $z > 0$

- $\left.\begin{array}{l} x < y \\ xz > yz \end{array}\right\}$ — " — wenn $z < 0$

- $\left.\begin{array}{l} x < y \\ \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \end{array}\right\}$ — " — wenn x, y beide positiv oder beide negativ sind



Betrag

Def.: Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ misst

$$|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x und 0.

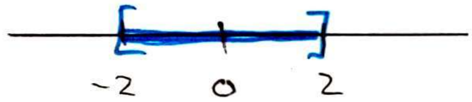
$|x-y|$ = Abstand zwischen x und y

Eigenschaften:

- $|x| = 0$ genau dann wenn $x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

<u>Ungleichungen mit Betrag</u>

- $|x| \leq 2$



$-2 \leq x \leq 2$

Lösungsmenge: $[-2, 2]$

- $|\underbrace{2x+3}_{=u}| < 6$

$-6 < u < 6$

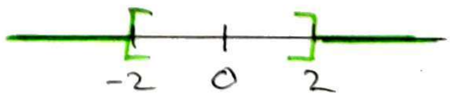
$-6 < 2x+3 < 6 \quad | -3$

$-9 < 2x < 3 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$-4.5 < x < 1.5$

Lösungsmenge: $]-4.5, 1.5[$

- $|x| > 2$



$x < -2$ oder $x > 2$

Lösungsmenge: $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

$[-2, 2]^c$

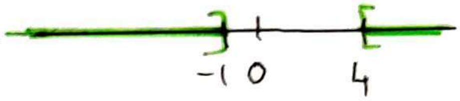
- $|2x-3| \geq 5$

$2x-3 \leq -5$ oder $2x-3 \geq 5$ $\quad | +3$

$2x \leq -2$ oder $2x \geq 8$ $\quad | \cdot \frac{1}{2}$

$x \leq -1$ oder $x \geq 4$

Lösungsmenge: $]-\infty, -1] \cup [4, \infty[$



- $|3x+2| + 6 < 2$

$|3x+2| < -4$

Lösungsmenge: $\emptyset$

- $|2x-6| + 8 > 2$

$|2x-6| > -6$

Lösungsmenge: $\mathbb{R}$