4 Funktionen

Def.: Mit Mengen D, W ist eine Funktion / Abbildung eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.

$$f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definitions-} \\ \text{bereich}}}{D} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wertebereich}}}{W}, \quad x \longmapsto f(x)$$

Bsp.:

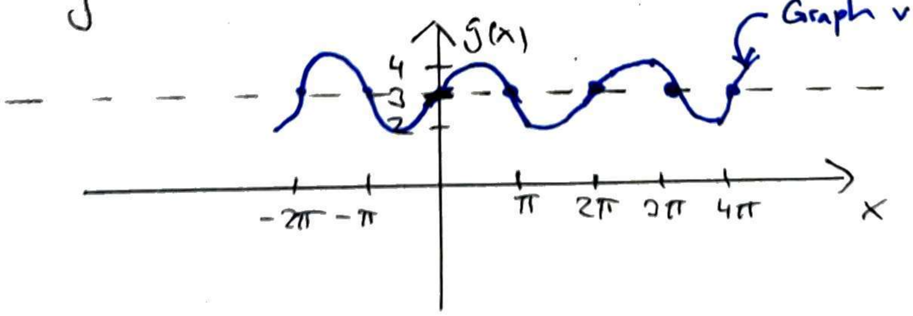
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[, \quad x \longmapsto x^2$

Def.: Die Menge an Funktionswerten

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\} \subset W$$

heißt Bildmenge.

- $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin x + 3$



$g(\mathbb{R}) = [2, 4]$

- $h(x) = \sqrt{x}$

  $D = [0, \infty[$ (oder Teilmengen davon)

  $W = \mathbb{R}$ (oder $[0, \infty[$)

- $A(x) = \pm\sqrt{x}$

  keine Funktion, da kein eindeutiger Funktionswert für $x>0$

Def.: Die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oder } f(D)}}{W}$$

heißt der Graph von f.

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oder } \mathbb{R}}}{[-1,1]}, \quad (x,y) \longmapsto \sin x \cos y$

$$f(\underset{x}{0}, \underset{y}{\pi}) = \underbrace{\sin 0}_{=0} \underbrace{\cos \pi}_{=-1} = 0$$

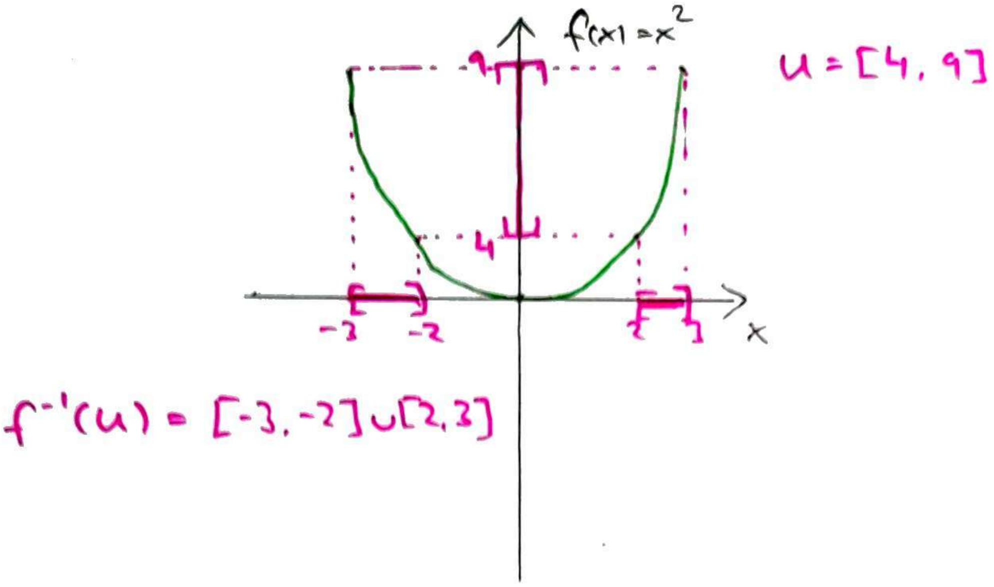
Punkt auf dem Graphen von f (gewölbte Fläche in 3D)

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x,y), f(x,y)) = ((0,\pi), 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (x, y, f(x,y)) = (0, \pi, 0) \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Def.: Für eine Teilmenge $U \subset W$ heißt

$$f^{-1}(U) = \{x \in D : f(x) \in U\} \subset D$$

das Urbild von U unter der Funktion f.



Def.: Die Funktion $id: D \to D, \ x \mapsto x$ heißt Identität / identische Abbildung.

Polynome

Def.: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ ist

grad(p) "Grad"

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ein $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = 0$ heißt Nullstelle von p.

Bsp.:

$$p(x) = 2x^2 + 2x - 12 \qquad (\text{Grad } 2)$$

hat die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -3$

Generell:

Polynomgrad	Bsp.	
1	$2x-1$	Auflösen
2	$2x^2+2x-12$	Mitternachtsformel / pq-Formel
3	$2x^3-14x+12$	Cardanische Formel I
4	x^4-x^3+2x+5	Cardanische Formel II
≥ 5		Allgemein keine Formel in geschlossener Form

Alternativ: rate eine Nullstelle x_0 und dividiere

$$p(x) : (x - x_0) = q(x)$$

Polynom mit Grad um 1 kleiner als der Grad von p

Bsp.: Nullstellen des kubischen Polynoms

$$p(x) = 2x^3 - 14x + 12 \;?$$

1. Möglichkeit: Cardanische Formel
2. Möglichkeit: Polynomdivision

Rate: $x_1 = 1$

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 0x^2 - 14x + 12) : (x - 1) = 2x^2 + 2x - 12 \\
\underline{-(2x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 14x + 12 \\
\qquad \underline{-(2x^2 - 2x)} \\
\qquad\qquad\quad -12x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{-(-12x + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x_{2,3} = \ldots$

$x_2 = 2$ (s.o.)

$x_3 = -3$

Rationale Zahlen

Def.: Mit Polynomen p, q heißt die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(gebrochen-)rationale Funktion.

Ihr Definitionsbereich ist

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

Bsp.: $f(x) = \dfrac{3x}{2x^3 - 14x + 12}$ hat den Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -3\}$ (s.o.)