Rationale ~~Zahlen~~ Funktionen

Def.: Mit Polynomen p, q heißt die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(gebrochen-) rationale Funktion.

Ihr Definitionsbereich ist

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

Bsp.: $f(x) = \dfrac{3x}{2x^3 - 14x + 12}$ hat den Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -3\}$ (s.o.)

Bsp.: Wenn $\text{grad}(p) \geq \text{grad}(q)$, dann können wir durch Polynomdivision die Funktion f auf eine andere Form bringen.

$$f(x) = \frac{6x^4 - 13x^3 + 11x^2 - 6x - 2}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$(6x^4 - 13x^3 + 11x^2 - 6x - 2) : (2x^2 - 3x + 1) = 3x^2 - 2x + 1 + \underbrace{\frac{-x-3}{2x^2-3x+1}}_{\text{Rest}}$$

$$\begin{array}{l}
-(6x^4 - 9x^3 + 3x^2) \\
\hline
\quad -4x^3 + 8x^2 - 6x - 2 \\
\quad -(-4x^3 + 6x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad 2x^2 - 4x - 2 \\
\qquad -(2x^2 - 3x + 1) \\
\hline
\qquad\quad -x - 3
\end{array}$$

Bemerkung:

Im Allgemeinen müssen wir davon ausgehen, dass bei der Division zweier Polynome ein Rest bleibt.

Beim "Herausdividieren" einer Nullstelle aus einem Polynom bleibt allerdings nie ein Rest.

Grund: Fundamentalsatz der Algebra

- Jedes Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen*

  * nicht notwendigerweise reell (sondern komplex)
  nicht notwendigerweise verschieden (sondern doppelt, dreifach, ...)

- $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

  lässt sich faktorisieren mit n Linearfaktoren

  $$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

  Nullstellen von p

  D.h. bei Division durch einen dieser Linearfaktoren $(x - x_k)$ bleibt immer noch ein Polynom.

Verkettung von Funktionen

Def.: Seien $f: D_f \longrightarrow W_f$
$g: D_g \longrightarrow W_g$

zwei Funktionen mit $W_g \subset D_f$.

$$f \circ g: D_g \longrightarrow W_f, \quad x \longmapsto f(g(x))$$

↑
"f verknüpft mit g"

Bsp.:

- $f(x) = \cos x$
  $g(x) = 2x - 3$

  $(f \circ g)(x) = \cos(2x-3)$ Definitionsbereich von cos: $D_f = \mathbb{R}$ ✓

  $(g \circ f)(x) = 2\cos x - 3$ Definitionsbereich von g: $D_g = \mathbb{R}$ ✓

- $f(x) = \sqrt{x}$
  $g(x) = x^2$

  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ $D_f = [0, \infty[$, $W_g = [0, \infty[$ $W_g \subset D_f$ ✓

  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x}^2 = x$ (nur definiert für $x \in D_f = [0, \infty[$)
  $D_g = \mathbb{R}$, $W_f = [0, \infty[$ $W_f \subset D_g$ ✓

- $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, \infty[$ $W_f = [0, \infty[$
  $g(x) = x - 5$ $D_g = \mathbb{R}$ $W_g = \mathbb{R}$

  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-5}$

  ⚠ $W_g \not\subset D_f$

  ↳ Wir müssen g einschränken:

  "Einschränkung auf $[5, \infty[$"

  Statt $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur $g|_{[5,\infty[}: [5, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$

$(f \circ g|_{[5,\infty[})(x) = \sqrt{x-5}$ $\qquad W_{g|_{[5,\infty[}} \subset D_f$ ✓

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} - 5$ $\qquad W_f \subset D_g$ ✓

Umkehrfunktion

Def.: Seien $f: D \to W$
$g: W \to D$

Funktionen mit

$$f \circ g = id_W \quad \text{und} \quad g \circ f = id_D .$$

Dann ist g die Umkehrfunktion / inverse Funktion / inverse Abbildung von f.

Notation: $g = f^{-1}$

Achtung:

- f^{-1} bedeutet nicht $\frac{1}{f}$, aber für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$

- $\sin^{-1} x$ bedeutet Umkehrfunktion von sin, nicht $\frac{1}{\sin x}$,
  aber $\sin^2 x$ bedeutet $(\sin x)^2$, nicht $\sin(\sin x)$.

Bsp.:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x+1$

  $y = 2x + 1$

  $x = 2y + 1 \quad | -1$

  $x - 1 = 2y \quad | :2$

  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

  $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$