Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch mit $T>0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+T) = f(x)$$

Bsp.:

Periode (= kleinstmögliches T)

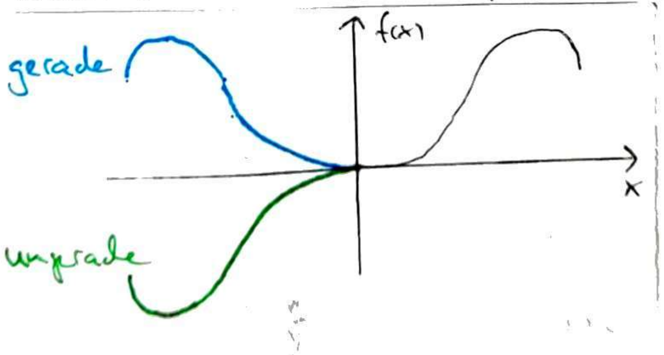
- $\sin x$ mit $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$
- $\cos x$ mit $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$
- $\tan x$ mit $T = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
- $\sin x + 1$ mit $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$
- $2\cos x$ mit $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$
- $\tan \frac{x}{4}$ mit $T = 4\pi, 8\pi, 12\pi, \ldots$

Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall.

$f: I \to \mathbb{R}$

heißt

- gerade, wenn für $x \in I$ gilt: $f(-x) = f(x)$
- ungerade, wenn für $x \in I$ gilt: $f(-x) = -f(x)$



Bsp.:

- Gerade Funktionen: $\cos x$, x^2, x^4, x^6, x^{2k} $(k \in \mathbb{Z})$
- Ungerade Funktionen: $\sin x, \tan x, x, x^3, x^5, x^{2k+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Beobachtung: Für beliebige Funktionen $f: I \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

$$u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad u(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -u(x)$$

und

$$f(x) = g(x) + u(x).$$

D.h. jede beliebige Funktion f lässt sich aufteilen in einen geraden Teil g + einen ungeraden Teil u.

Eigenschaften & Rechenregeln für trigonometrische Funktionen

- Trigonometrischer Pythagoras: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$
- Additionstheoreme

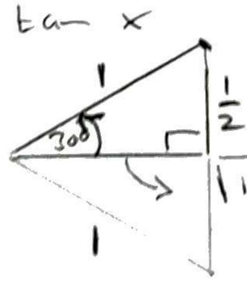
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

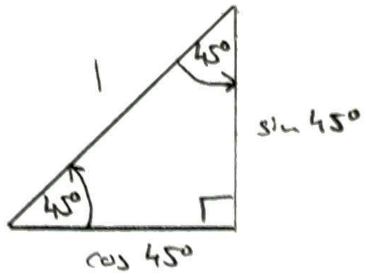
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

- Spezielle Werte

x in ° :	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x in rad :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.



$$\sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{4}{4} - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



gleichschenkliges Dreieck

$\sin 45° = \cos 45°$

$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$

$\sin^2 45° + \sin^2 45° = 1$

$2 \sin^2 45° = 1$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$

Inverse trigonometrische Funktionen

Für die Umkehrfunktionen verwenden wir die folgenden Einschränkungen von sin, cos, tan:

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

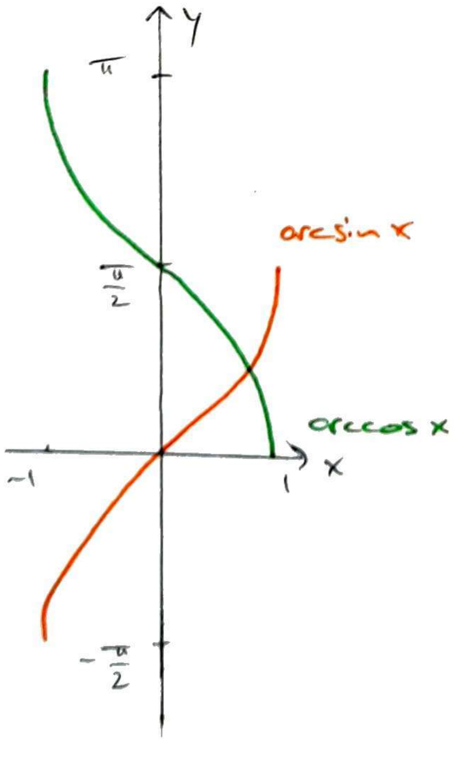
$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

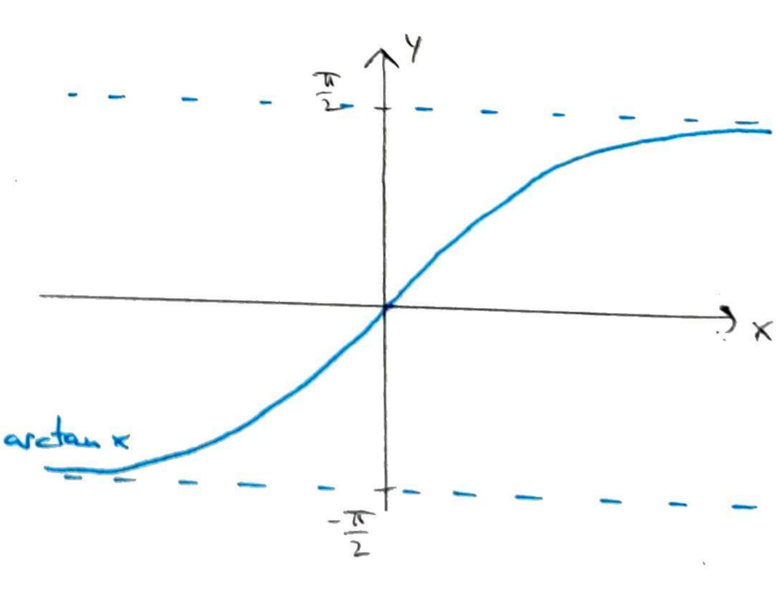
$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

$\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



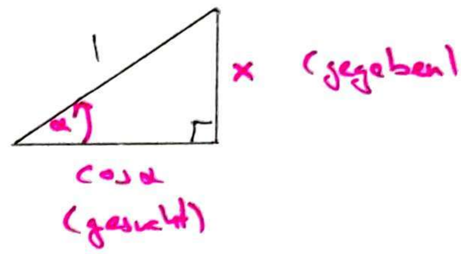


Bsp.:

- $\cos(\arccos x) = x$ (für $x \in [-1,1]$)
- $\cos(\underbrace{\arcsin x}_{=\alpha})$ (für $x \in [-1,1]$)

$\alpha = \arcsin x$

$x = \sin \alpha$



$\underbrace{\sin^2 \alpha}_{= x^2} + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$