6 Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall:

- Covid
- Radioaktivität
- Kontostand + Zinsen
- Laden eines Kondensators
- ...

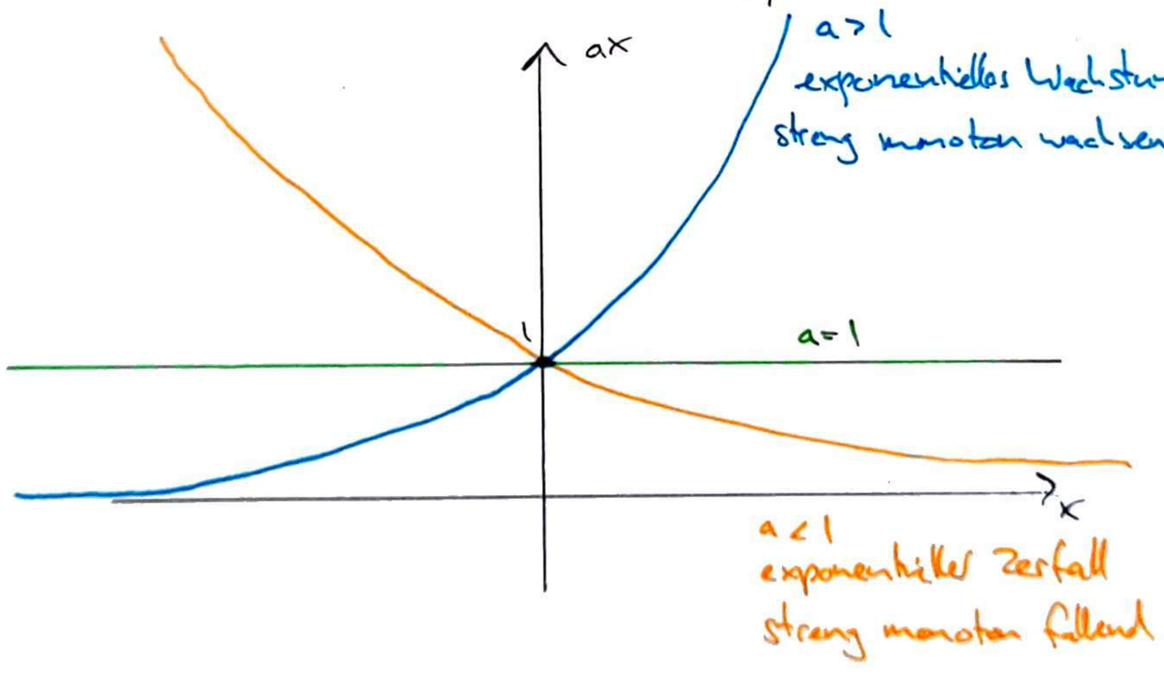
Def.: Die Funktion

$$\mathbb{R} \to]0,\infty[\; : \; x \longmapsto a^x \qquad (\text{mit Basis } a > 0)$$

heißt Exponentialfunktion.

Mit $a = e$ = Eulersche Zahl $\approx 2.718281828\ldots$ (nicht periodisch, irrationale Zahl) erhalten wir die natürliche Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \to]0,\infty[\; : \; x \longmapsto e^x = \exp x$$



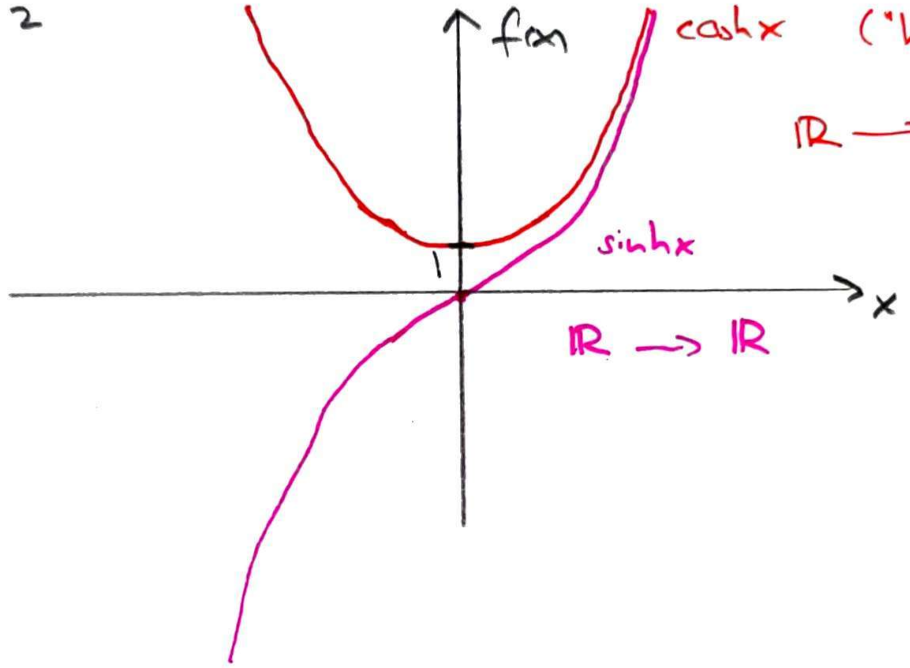
Hyperbelfunktionen

Gerader Anteil der natürlichen Exponentialfunktion:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \qquad \text{(hyperbolisches Kosinus)}$$

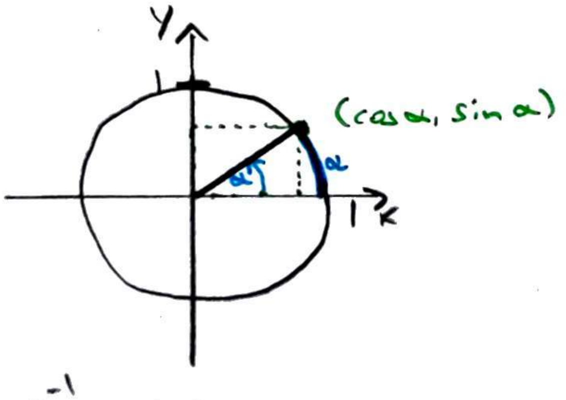
Ungerader Anteil der natürlichen Exponentialfunktion:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \qquad \text{(hyperbolischer Sinus)}$$



Einheitskreis

$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$



$\cos^{-1} = \arccos$

$\sin^{-1} = \arcsin$

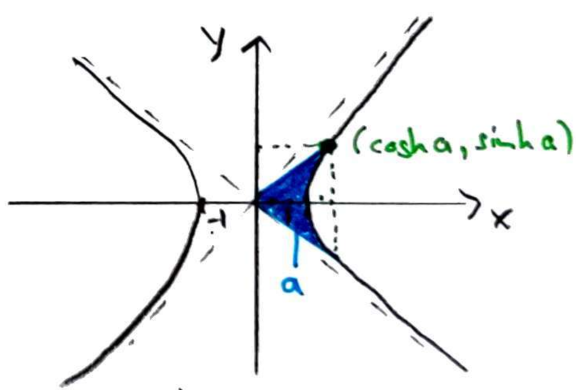
↑

Arcusfunktionen

arcus = Bogenlänge α

Einheitshyperbel

$x^2 - y^2 = 1$ $\qquad \cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$



$\cosh^{-1} = \text{acosh}$

$\sinh^{-1} = \text{asinh}$

↑

Areafunktionen

area = Flächeninhalt a

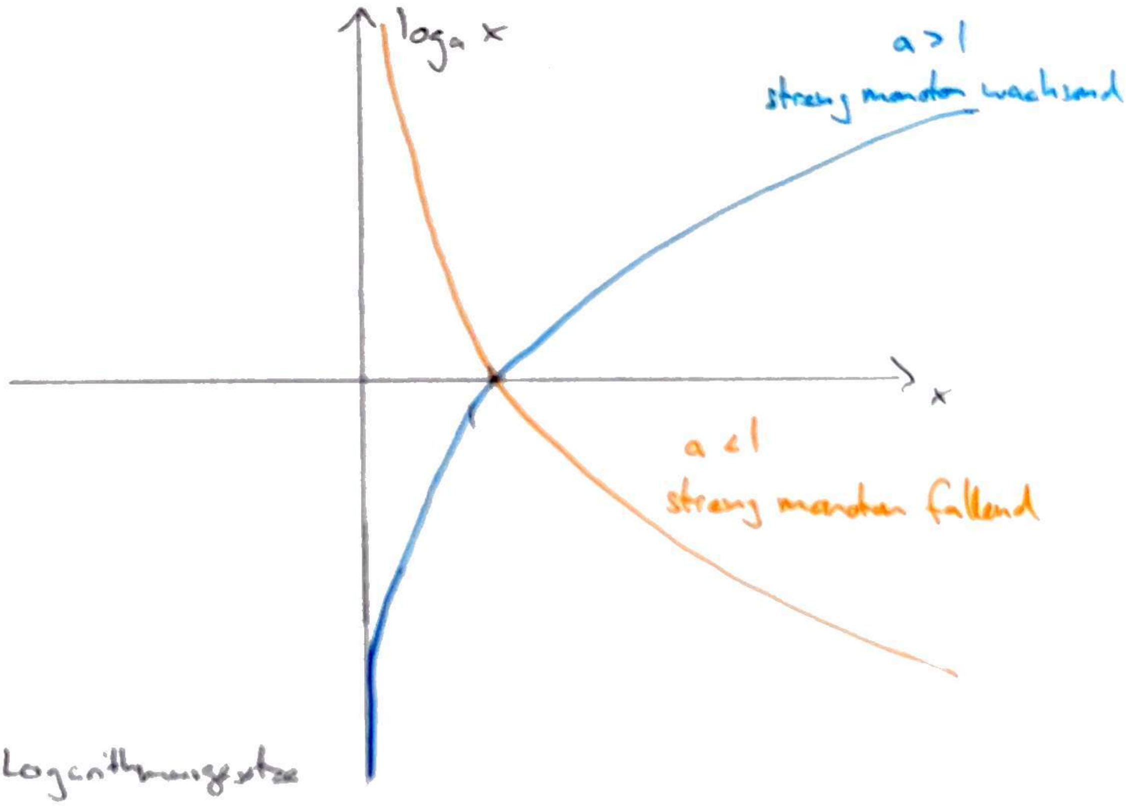
Logarithmus

Def.: Für $a > 0$, $a \neq 1$ ist die Exponentialfunktion invertierbar mit Umkehrfunktion

$$\log_a : \left]0, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \log_a x$$

Natürlicher Logarithmus

$$\ln : \left]0, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln x = \log_e x$$



Rechenregeln / Logarithmengesetze

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x^p) = p \log_a x$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$

- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (für beliebige Basen $b > 0$, $b \neq 1$)

Bsp.:

- Festgeld: $K(n) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Zinssatz p.a.

Kontostand nach n Jahren

anfänglicher Anlagebetrag

Nach wie vielen Jahren kann ich mir ein neues Fahrrad für K [€] leisten?

$$\frac{K}{K_0} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n \qquad (K_0 > 0)$$

$$n = \log_{1+\frac{p}{100}} \frac{K}{K_0} = \frac{\ln \frac{K}{K_0}}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln K - \ln K_0}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

- Exponentieller Zerfall durch Radioaktivität oder chemische Reaktion

Zerfallsrate

$$c(t) = c_0 e^{-kt}$$

Konzentration nach Ablauf der Zeit t

anfängliche Konzentration

Wann ist nur noch die Hälfte der anfänglichen Konzentration übrig (Halbwertszeit)?

$$\frac{\cancel{c_0}}{2} = \cancel{c_0} e^{-kt} \qquad (c_0 > 0)$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

$$-kt = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{k}$$

Mit natürlicher Exponentialfunktion / natürlichem Logarithmus lässt es sich besonders leicht rechnen. Deshalb konvertieren wir andere Basen a in der Regel zur natürlichen Exponentialfunktion:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a) x}$$

um den Faktor ($\ln a$) in horizontaler Richtung gestauchte e-Funktion