7 Differentialrechnung

Idee von Stetigkeit:

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

I = Intervall, $x_0 \in I$

Wenn für $x \longrightarrow x_0$ gilt $f(x) \longrightarrow f(x_0)$, dann nennen
"für x gegen x_0"

wir die Funktion f stetig in x_0.

Notation: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

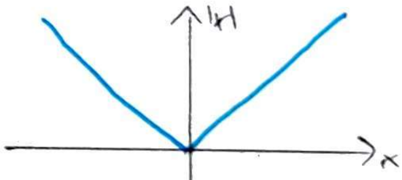
"Limes / Grenzwert für x gegen x_0"

D.h.
- egal wie & aus welcher Richtung $x \longrightarrow x_0$, nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ immer derselben reellen Zahl an
- diese reelle Zahl = f ausgewertet bei x_0

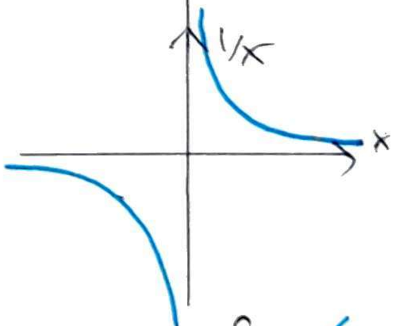
Eine Funktion, die in allen $x_0 \in I$ stetig ist, heißt stetig.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = x$ stetig ✓
- $f(x) = |x|$ stetig ✓

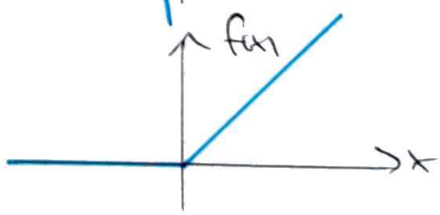


- $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, außer bei $x_0 = 0$

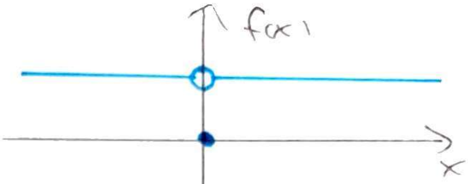


- $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : x \geq 0 \end{cases}$

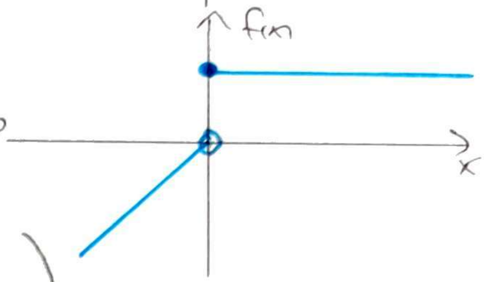
stetig ✓



- $f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 & : x \neq 0 \end{cases}$ stetig außer bei $x_0 = 0$

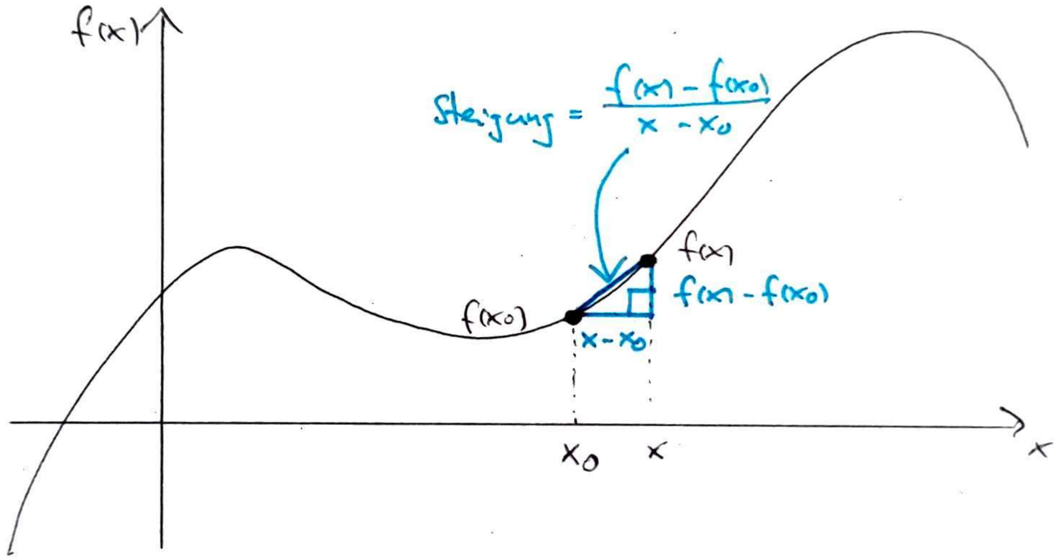


- $f(x) = \begin{cases} x & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases}$ stetig, außer bei $x_0 = 0$



(• $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{Q} \\ 1 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nirgends stetig)

Idee der Differenzierbarkeit:



Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert, dann nennen wir die Funktion f differenzierbar in x_0 und den Grenzwert auch die Ableitung von f in x_0.

Notation:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Bsp.:

- $f(x)$ = Höhe entlang eines Wanderwegs über NN
  $f'(x)$ = Steigung des Wanderwegs

- $s(t)$ = zurückgelegte Strecke seit Verlassen der Haustür
  $s'(t)$ = Geschwindigkeit

- $v(t) = s'(t)$ = — " —
  $v'(t) = s''(t)$ = Beschleunigung

- $N(t)$ = Populationsgröße
  $N'(t)$ = Wachstumsrate

Bsp.:

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	$(c \in \mathbb{R})$ $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0$
x	1	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$
x^2	$2x$	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$
x^r	$r x^{r-1}$	$(r \in \mathbb{R})$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
e^x	e^x	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	

Regeln:

- Konstante Vielfache: $(cf)' = cf'$

  z.B. $f(x) = 3x^2$ $\qquad f'(x) = 3\,(2x) = 6x$

- Summen: $(f+g)' = f' + g'$

  z.B. $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $\qquad f'(x) = 2\,(3x^2) - 4\,(2x) = 6x^2 - 8x$

- Produktregel: $f = uv$ $\qquad f' = u'v + uv'$

  z.B. $f(x) = \underbrace{2x}_{=u(x)}\,\underbrace{\sin x}_{=v(x)}$

  $$f'(x) = 2\sin x + 2x\cos x$$

- Quotientenregel: $f = \frac{u}{v}$ $\qquad f' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$

  z.B. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x \;\}\, u(x)}{\cos x \;\}\, v(x)}$

  $$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

  $$= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$