Regeln:

- Konstante Vielfache: $(cf)' = cf'$

  z.B. $f(x) = 3x^2$ $\qquad f'(x) = 3\,(2x) = 6x$

- Summen: $(f+g)' = f' + g'$

  z.B. $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $\qquad f'(x) = 2\,(3x^2) - 4\,(2x) = 6x^2 - 8x$

- Produktregel: $f = uv$ $\qquad f' = u'v + uv'$

  z.B. $f(x) = \underbrace{2x}_{=u(x)}\ \underbrace{\sin x}_{=v(x)}$

  $$f'(x) = 2\sin x + 2x\cos x$$

- Quotientenregel: $f = \frac{u}{v}$ $\qquad f' = \dfrac{vu' - v'u}{v^2}$

  z.B. $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x \ \}\, u(x)}{\cos x \ \}\, v(x)}$

  $$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

- Kettenregel: $(f \circ u)'(x) = \underbrace{f'(u(x))}_{\text{äußere Ableitung}}\ \underbrace{u'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

  z.B. $f(x) = \sqrt{1+x^2} = (\underbrace{1+x^2}_{u(x)})^{1/2}$

  $$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Ableitung}}\ \underbrace{(0 + 2x)}_{\text{innere Ableitung}} = \frac{2x}{2\,(1+x^2)^{1/2}}$$

  $$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

  $f(x) = \sin(\underbrace{2\pi x}_{u(x)})$

  $f'(x) = \cos(2\pi x)\,2\pi = 2\pi\cos(2\pi x)$

Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: D \longrightarrow f(D)$, $x \mapsto f(x)$ differenzierbar, streng monoton und $f'(x) \neq 0$ auf ganz D.

Dann ist f umkehrbar mit $f^{-1}: f(D) \longrightarrow D$, $y \mapsto f^{-1}(y)$

und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} .$$

Beweis:

$$f(\underbrace{f^{-1}(y)}_{u(y)}) = y \qquad \Big| \frac{d}{dy}$$ (leite beide Seiten nach y ab)

$$\underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{\text{äußere Ableitung}} \; \underbrace{(f^{-1})'(y)}_{\text{innere Ableitung}} = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ qed

Bsp.:

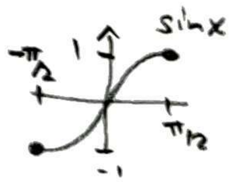
- $f(x) = \ln x = \exp^{-1} x$

  $\exp: \mathbb{R} \to]0,\infty[$

  $\ln:]0,\infty[\to \mathbb{R}$

  $$f'(x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$ $(x \in]0,\infty[)$

- $f(x) = \arcsin x = \sin^{-1} x$

  $$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ $(x \in]-1,1[)$

- $f(x) = \arccos x = \cos^{-1} x$

  $$f'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ $(x \in]-1,1[)$

- $f(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$

  $\tan^2(\arctan x)$
  $= (\tan(\arctan x))^2$

  $$f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$ $(x \in \mathbb{R})$

Minimierungs- und Maximierungsprobleme

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ zwei Mal differenzierbar mit

- $f''(x) > 0$

  dann heißt f linksgekrümmt in x

- $f''(x) < 0$

  dann heißt f
  rechtsgekrümmt in x

Definition:

Der Graph von f hat bei $x_0 \in D$ ein

- lokales Minimum, wenn

  $$f(x_0) \leq f(x)$$

  für alle x in einer Umgebung von x_0.

- lokales Maximum, wenn

  $$f(x_0) \geq f(x)$$

  für alle x in einer Umgebung von x_0.

Satz:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

- Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum / Maximum, dann ist notwendigerweise $f'(x_0) = 0$

  (nicht unbedingt umgekehrt: für $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber dort befindet sich kein lokales Minimum / Maximum)

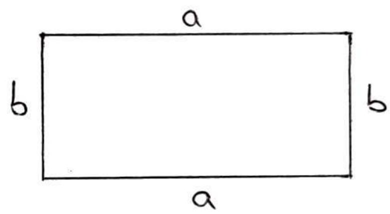
Sei $f: D \to \mathbb{R}$ zwei Mal differenzierbar.

- Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum.
- Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Maximum.

(nicht unbedingt umgekehrt: für $f(x) = x^4$ ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, aber f hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum)

e^{-1/x^2}

Bsp.: Welches Rechteck mit Fläche $4\,m^2$ hat den kleinsten Umfang?



$ab = 4 \; [m^2]$

$U = 2a + 2b$

$$b = \frac{4}{a}$$

$$U(a) = 2a + 2\frac{4}{a} = 2a + \frac{8}{a} \leftarrow 8a^{-1}$$

$$U'(a) = 2 + 8(-1)a^{-2}$$

$$= 2 - \frac{8}{a^2} \overset{!}{=} 0$$

$$2 = \frac{8}{a^2}$$

$$a^2 = 4 \qquad (a \neq 0)$$

$$a = \pm 2 \quad [m]$$

(nur "+" ist physikalisch sinnvoll)

Ist das auch wirklich ein Minimum?

$$U''(a) = \frac{16}{a^3}$$

$$U''(2) = \frac{16}{2^3} = \frac{16}{8} = 2 > 0$$

A: Das Rechteck mit Kantenlänge $a = 2m$, $b = 2m$ hat den kleinsten Umfang