Tutorium 13: Komplexe Zahlen (Fortsetzung), Vektorrechnung (Fortsetzung), Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1 Vereinfache die folgenden Ausdrücke ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\frac{e^a + e^{-a}}{2} \qquad \frac{e^a - e^{-a}}{2} \qquad \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2} \qquad \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2i}$$

Aufgabe 2* In der Elektrotechnik beschreibt man Wechselspannungen $U(t)$ und Wechselströme $I(t)$ durch komplexe Exponentialfunktionen, wobei die physikalisch realen Spannungen und Ströme jeweils durch den Realteil $\operatorname{Re} U(t)$ bzw. $\operatorname{Re} I(t)$ gegeben sind.

(a) Eine Steckdose in Deutschland liefert eine Spannung der Form $U(t) = U_{\max} e^{i\omega t}$ mit Spannungsamplitude $U_{\max} = 325$ V und Kreisfrequenz $\omega = 100\pi \ \frac{1}{s}$. (Dies entspricht einer effektiven durchschnittlichen Spannung von $\bar{U} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = 230$ V und einer Frequenz von $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz.)

Berechne den physikalisch realen Teil der Spannung $\operatorname{Re} U(t)$ und skizziere den Graphen dieser Funktion.

(b) Die Stromstärke $I(t)$ errechnet sich aus der Spannung $U(t)$ durch das komplexe Ohmsche Gesetz

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z}.$$

Dabei ist $Z \in \mathbb{C}$ ein komplexer Widerstand, der auch Impedanz gennant wird.

Berechne den physikalisch realen Teil der Stromstärke $\operatorname{Re} I(t)$ und skizziere den Graphen dieser Funktion

- an einem Ohmschen Widerstand mit reeller Impedanz $Z = R = 25\ \Omega$
- an einer Spule mit imaginärer Impedanz $Z = \omega L i$ und Induktivität $L = 0.01$ H.

Aufgabe 3 Gib jeweils ein Beispiel für Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ an, sodass die Menge aller Linearkombinationen

$$\{\, x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \,\}$$

(a) den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$

(b) eine Ebene in $\mathbb{R}^3$

(c) eine Gerade in $\mathbb{R}^3$

(d) einen Punkt in $\mathbb{R}^3$

ergibt.

Aufgabe 4 Gegeben sind $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimme $\|\boldsymbol{u}\|$ und $\|\boldsymbol{v}\|$.

(b) Was gibt $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ an?

(c) Berechne den Winkel zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$.

(d) Welcher Vektor mit Länge 1 zeigt in dieselbe Richtung wie $\boldsymbol{v}$?

(e) Finde zwei verschiedene Vektoren $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, die beide orthogonal zu $\boldsymbol{u}$ sind.

(f) Wie sieht die Menge $\left\{\, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \,\right\}$ geometrisch aus?

Aufgabe 5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Löse dieses Gleichungssystem graphisch im Zeilenbild und im Spaltenbild.

Aufgabe 6 Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4x - 2y \\ -2x + y \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

mit rechten Seiten

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Wie sieht das Zeilenbild in beiden Fällen aus?

(b) Wie sieht das Spaltenbild in beiden Fällen aus?